Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 12

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

12-1 Wenn $v_1, v_2 \in S^{n-1}$ definieren wir den unorientierten Winkel $\theta_{12} \in [0, \pi]$ zwischen v_1, v_2 durch die Gleichung

$$\cos\theta_{12} := g_{\mathbb{R}^n}(v_1, v_2).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen v_1 und v_2 auf $(S^{n-1}, g_{S^{n-1}})$ durch den Winkel θ_{12} gegeben ist: $d_{g_{S^{n-1}}}(v_1, v_2) = \theta_{12}$.
Hinweis: Schreiben Sie die minimierende Geodätische zwischen v_1 und v_2.

(b) Folgern Sie daraus, dass, wenn $v_3 \in S^{n-1}$ ein weiteres Element ist, dann

$$\theta_{13} \leq \theta_{12} + \theta_{23},$$

wobei θ_{13} der Winkel zwischen v_1 und v_3 ist und θ_{23} der Winkel zwischen v_2 und v_3 ist.

12-2 Es sei (M, g) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir erinnern uns an die Definition der Hesseschen Form von f:

$$\mathrm{H}(f)_p(v_1, v_2) := g_p(\nabla_{v_1} \mathrm{grad}\, f, v_2), \qquad \forall\, p \in M,\ v_1, v_2 \in T_pM.$$

(a) Für alle Geodätischen $\gamma : I \to M$ betrachten Sie die Funktion $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma) = g_\gamma\big((\mathrm{grad}\, f) \circ \gamma, \dot\gamma\big), \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f \circ \gamma) = \mathrm{H}(f)_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma).$$

Es sei nun angenommen, dass $\mathrm{H}(f)_p$ positiv definit für alle $p \in M$ ist.

(b) Wenn $p_0, p_1 \in \mathrm{Krit}(f) := \{p \in M \mid d_pf = 0\}$ sind, zeigen Sie, dass $p_0 = p_1$.

Es sei weiter angenommen, dass f eigentlich[1] ist und dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f \geq c$.

(c) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger globaler minimierender Punkt p für f existiert und dass $\mathrm{Krit}(f) := \{p\}$.

12-3 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $V : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wenn M_0, M_1 Untermannigfaltigkeiten von M sind, setzen wir

$$S : \mathscr{C}_{M_0M_1} \to \mathbb{R}, \qquad S(\gamma) := \int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2} g_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) - V(\gamma)\Big)\mathrm{d}t.$$

Es sei $\gamma \in \mathscr{C}_{M_0M_1}$ und $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \to M$ eine Familie von Kurven, sodass $\gamma_0 = \gamma$ und $\gamma_s \in \mathscr{C}_{M_0M_1}$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Man setze $X = X^\Gamma := \partial_s\Gamma|_{s=0}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} S(\gamma_s) = \mathrm{d}_\gamma S \cdot X := -\int_0^1 \Big(g_\gamma\big(X, \ddot\gamma + \mathrm{grad}\, V(\gamma)\big)\mathrm{d}t\Big) - \sum_{j=1}^{k-1} g_\gamma\big(X(t_j), \Delta\dot\gamma(t_j)\big) + g_{\gamma(1)}\big(X(1), \dot\gamma(1)\big) - g_{\gamma(0)}\big(X(0), \dot\gamma(0)\big),$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = 1$ die Punkte sind, für die $\Gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[t_j, t_{j+1}]}$ für alle $j = 0, \ldots, k-1$ glatt ist und $\Delta\dot\gamma(t_j) := \dot\gamma^+(t_j) - \dot\gamma^-(t_j)$ für alle $j = 1, \ldots, k-1$.

(b) Es sei nun $\gamma \in \mathscr{C}_{M_0M_1}$, sodass $S(\gamma) \leq S(\delta)$ für alle $\delta \in \mathscr{C}_{M_0M_1}$. Zeigen Sie, dass

$$\ddot\gamma = -\mathrm{grad}\, V(\gamma), \qquad \dot\gamma(i) \in (T_{\gamma(i)}M_i)^\perp \quad \text{für} \quad i = 0, 1.$$

[1] Eine Funktion f heißt eigentlich, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt ist.