Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 11

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 4.7.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

11-1 (4 Punkte) Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $Y = fX$ für eine positive glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass es eine glatte Funktion $\tau : \mathcal{U}_Y \to \mathbb{R}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(i) für alle $p \in M$ ist $\tau(\cdot, p) : (\mathcal{U}_Y)_p \to (\mathcal{U}_X)_p$ ein monoton steigender Diffeomorphismus mit $\tau(0, p) = 0$.

(ii) für alle $(t, p) \in \mathcal{U}_X$ gilt

$$\Phi_Y^t(p) = \Phi_X^{\tau(t,p)}(p).$$

Bemerkung: Wir haben somit gezeigt, dass X und Y dieselben Flußlinien haben (nur die Parametrisierungen sind unterschiedlich).

11-2 Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Es sei σ ein kontravarianter oder kovarianter Tensor. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Wenn $\mathcal{L}_X\sigma = c\sigma$, für $c \in \mathbb{R}$, dann $(\Phi_X^s)^*\sigma = e^{cs}\sigma$;

(b) (2 Punkte) Wenn $\mathcal{L}_X\sigma = f\sigma$ für $f \in C^\infty(M)$, dann gibt es eine Funktion $g : \mathcal{U}_X \to \mathbb{R}$ mit $g(0, p) = 1$ für alle $p \in M$, sodass $((\Phi_X^s)^*\sigma)(p) = g(s, p)\sigma(p)$, für alle $(s, p) \in \mathcal{U}_X$.

11-3 Es sei $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0,\ y = 0\}$ der euklidische drei-dimensionale Raum ohne die z-Achse. Wir betrachten die Vektorfelder

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

(a) (2 Punkte) Finden Sie explizite Formeln für die Flüße

$$\Phi_X : \mathcal{U}_X \to M \qquad \Phi_Y : \mathcal{U}_Y \to M.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen den Fällen $y = 0$ und $y \neq 0$ für X und $x = 0$, $x \neq 0$ für Y. Benutzen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

(b) (3 Punkte) Es sei $p = (-1, -1, 0) \in M$ und betrachten Sie

$$F : [-1, 1]^2 \setminus \Big(\{0\} \times [0, 1]\Big) \to M, \qquad F(\sigma, \tau) = \Phi_Y^{\tau+1} \circ \Phi_X^{\sigma+1}(p),$$

$$G : [-1, 1]^2 \setminus \Big([0, 1] \times \{0\}\Big) \to M, \qquad G(\sigma, \tau) = \Phi_X^{\sigma+1} \circ \Phi_Y^{\tau+1}(p).$$

Finden Sie explizite Formeln für F und G. Bestimmen Sie die Menge

$$A := \Big\{ (\sigma,\tau) \in [-1,1]^2 \setminus \Big(\{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\} \Big) \;\Big|\; F(\sigma,\tau) = G(\sigma,\tau) \Big\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$\arctan(t) + \arctan(1/t) = \operatorname{sgn}(t) \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Zusatz: (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $[X,Y] = 0_{TM}$ (Benutzen Sie, dass $[X,Y] = \mathcal{L}_X Y$ und die Formel (8.11) im Skript).