Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 10

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

10-1 Es sei (M, g) eine n-dimensionale PR-Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie:

(a) Wenn (M, g) konstante Schnittkrümmung K in p besitzt, dann gilt

$$\mathrm{Ric}_p = K(n-1)g_p, \qquad \mathrm{skal}(p) = Kn(n-1);$$

(b) Die Skalarkrümmung $\mathrm{skal}(p)$ in p bestimmt den Krümmungstensor $R_p \in (T_p^*M)^{\otimes 4}$ in p falls $n = 2$;

(c) Die Ricci-Krümmung Ric_p bestimmt den ganzen Krümmungstensor $R_p \in (T_p^*M)^{\otimes 4}$ in p falls $n = 3$. *Hinweis: Betrachten Sie eine orthonormale Basis von T_pM. Sie dürfen auch nur den Fall einer Riemannschen Metrik bearbeiten.*

10-2 Es sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $x : U \to V$ Normalkoordinaten um $p \in M$, wobei $U \subset M$ und $V \subset \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $g^p := (x^{-1})^*g$ und $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$ für den euklidischen Ball von Radius r um $0 \in \mathbb{R}^n$. Durch die Schritte (a), (b) und (c) zeigen Sie, dass

$$\mathrm{vol}_{g^p}(B_r^n) = \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) - \frac{\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1})}{6n(n+2)} \cdot \mathrm{skal}(p) r^{n+2} + o(r^{n+2}).$$

Also beeinflusst $\mathrm{skal}(p)$ die Differenz zwischen $\mathrm{vol}_{g^p}(B_r^n)$ und $\mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) = r^n \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_1^n)$ zur Ordnung $n+2$ in r. Was passiert für $\mathrm{skal}(p) > 0$ oder $\mathrm{skal}(p) < 0$?

(a) Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von g_x^p um $x = 0$ zur zweiten Ordnung stellen Sie fest, dass

$$\sqrt{\det g^p(x)} = 1 - \sum_{i,j} \frac{1}{6} \mathrm{Ric}_{ij}(p) x^i x^j + o(|x|^2_{g_{\mathbb{R}^n}})$$

(b) Aus der Definition des Integrals und aus der Darstellung von $g_{\mathbb{R}^n}$ in Polarkoordinaten leiten Sie die folgende Formel her:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{g^p}(B_r^n) &= \int_{B_r^n} \Big(1 - \sum_{i,j} \frac{1}{6} \mathrm{Ric}_{ij}(p) x^i x^j + o(|x|^2_{g_{\mathbb{R}^n}})\Big) \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}} \\ &= \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j} \Big(\mathrm{Ric}_{ij}(p) x^i x^j\Big) \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} + o(r^{n+2}).\end{aligned}$$

(c) Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Endomorphismus und $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die assoziierte Bilinearform $Q(x) = g_{\mathbb{R}^n}(Ax, x)$. Zeigen Sie:

$$\int_{S^{n-1}} Q \, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = \frac{\mathrm{Spur} A}{n} \cdot \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1}).$$

Hinweis: Schreiben Sie $Q(x) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j$ und berechnen Sie das Integral von $x^i x^j$ mit $i \neq j$ und das Integral von $(x^i)^2$ separat. Betrachten Sie die Isometrie $I : S^{n-1} \to S^{n-1}$,

$$I(x) = (\dots, x^{i-1}, -x^i, x^{i+1}, \dots),$$

die das Vorzeichen der i-ten Koordinate ändert, um zu zeigen

$$\int_{S^{n-1}} x^i x^j \, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = 0, \qquad \textit{für alle } i \neq j.$$

Betrachten Sie die Isometrie $J : S^{n-1} \to S^{n-1}$,

$$J(x) = (\ldots, x^{i-1}, x^j, x^{i+1}, \ldots, x^{j-1}, x^i, x^{j+1}, \ldots),$$

welche die j-te und i-te Koordinate umtauscht, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Vol}_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 \,\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = n \int_{S^{n-1}} (x^i)^2 \,\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} \qquad \textit{für alle } i.$$

10-3 Es seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und betrachten Sie das Produkt $(M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$. Es seien ∇^1 und ∇^2 die Levi-Civita Ableitungen von g_1 und g_2 und ∇ die Levi-Civita Ableitung von $g_1 + g_2$.

Für $X \in \mathfrak{X}(M_i)$, $i = 1, 2$ schreiben wir $X^h \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ für die horizontale Hochhebung. Zeigen Sie mit Hilfe der Koszul-Formel

$$\nabla_{X^h} Y^h = \begin{cases} (\nabla^1_X Y)^h & \text{falls } X \in \mathfrak{X}(M_1),\ Y \in \mathfrak{X}(M_1); \\ 0 & \text{falls } X \in \mathfrak{X}(M_1),\ Y \in \mathfrak{X}(M_2); \\ 0 & \text{falls } X \in \mathfrak{X}(M_2),\ Y \in \mathfrak{X}(M_1); \\ (\nabla^2_X Y)^h & \text{falls } X \in \mathfrak{X}(M_2),\ Y \in \mathfrak{X}(M_2). \end{cases}$$

Es seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$. Beweisen Sie, dass

$$R(X, Y)Z = 0$$

falls eins der Vektorfelder X, Y, Z die horizontale Hochhebung eines Elements in $\mathfrak{X}(M_1)$ und eins der Vektorfelder X, Y, Z die horizontale Hochhebung eines Elements in $\mathfrak{X}(M_2)$ ist.

Schließen Sie daraus, dass für alle $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ und alle $u, v \in T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$

$$R(u, v, v, u) = R_1(u_1, v_1, v_1, u_1) + R_2(u_2, v_2, v_2, u_2),$$

wobei $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$ mit $u_i, v_i \in T_{p_i} M_i$ für $i = 1, 2$. Folgern Sie, dass

(a) $K(\Pi) = 0$, wenn $\Pi = \mathbb{R} \cdot X^h + \mathbb{R} \cdot Y^h$ für $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ und $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$;

(b) $K \geq 0$ (bzw. $K \leq 0$), falls $K_1 \geq 0$ und $K_2 \geq 0$ (bzw. $K_1 \leq 0$ und $K_2 \leq 0$).;

(c) ist es wahr, dass $K_1 > 0$ und $K_2 > 0$ die Ungleichung $K > 0$ implizieren;

(d) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ric}_{(p_1,p_2)}(u, u) = (\mathrm{Ric}_1)_{p_1}(u_1, u_1) + (\mathrm{Ric}_2)_{p_2}(u_2, u_2), \quad u = u_1 + u_2 \in T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2,$$

wobei $u_i \in T_{p_i} M_i$, $i = 1, 2$. Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{Ric} > 0$ gilt, falls $\mathrm{Ric}_1 > 0$ und $\mathrm{Ric}_2 > 0$. Ist es wahr, dass $\mathrm{Ric}_1 > 0$ und $\mathrm{Ric}_2 \geq 0$ die Ungleichung $\mathrm{Ric} > 0$ implizieren?

(e) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{skal}(p_1, p_2) = \mathrm{skal}_1(p_1) + \mathrm{skal}_2(p_2).$$

Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{skal} > 0$, falls $\mathrm{skal}_1 > 0$ und $\mathrm{skal}_2 \geq 0$.

10-4 Es sei $g = \mathrm{d}\theta^2 + r^2(\theta, \phi)\mathrm{d}\phi^2$ eine Riemannsche Metrik auf $I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, wobei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $r : I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to (0, \infty)$ eine positive Funktion ist. Zeigen Sie: Die Gauß-Krümmung von g ist gegeben durch

$$K = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}.$$

Hinweis: Nehmen Sie den orthonormalen Rahmen $e_1 = \partial_\theta$ und $e_2 = \frac{1}{r}\partial_\phi$ und benutzen Sie die Formel $K\mathrm{vol}_g = -\mathrm{d}\omega^2_1$. Berechnen Sie ω^2_1, in dem Sie die Symmetrie und die Verträglichkeit mit der Metrik der Levi-Civita Ableitung verwenden.

Berechnen Sie K, wenn $g = \iota^* g_{\mathbb{R}^3}$, wobei $\iota : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Revolutionsfläche, die durch Drehung um die z-Achse des Kreises $(r-2)^2 + z^2 = 1$ erzeugt wird. Skizzieren Sie die Fläche und identifizieren Sie die Punkte, in denen K negativ, null oder positiv ist.