Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 10

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 27.6.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

10-1 (1 Punkte) Schreiben Sie die Übergangsfunktion von $T\mathbb{CP}^1$ auf der offenen Menge $\mathbb{CP}^1 \setminus \{[1:0],[0:1]\}$, die zu den Karten φ_0, φ_1 in Aufgabe 4-2 assoziiert ist. *Hinweis: Identifizieren Sie bitte* $\mathbb{R}^2$ *mit* $\mathbb{C}$.

(2 Punkte) Finden Sie ein Vektorfeld X_2 auf $\mathbb{CP}^1$, sodass

$$\{p \in \mathbb{CP}^1 \mid X_2(p) = 0_p\} = \{[1:0],[0:1]\}$$

(also hat X_2 genau zwei Nullstellen). *Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 9-1.*

(2 Punkte) Finden Sie ein Vektorfeld X_1 auf $\mathbb{CP}^1$, sodass

$$\{p \in \mathbb{CP}^1 \mid X_1(p) = 0_p\} = \{[0:1]\}$$

(also hat X_1 genau eine Nullstelle). *Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 9-1.*

Zusatz (3 Punkte): Wir wissen schon: es gibt einen Diffeomorphismus $F : \mathbb{CP}^1 \to S^2$ (siehe Aufgabe 4-7). Es sei dazu $\psi : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2$ die Parametrisierung $\psi(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ der geographischen Länge und Breite. Schreiben Sie X_2 in diesen Koordinaten und skizzieren Sie es.

10-2 (3 Punkte) Es sei $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ die euklidische Sphäre und $\iota : S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ ihre Inklusion. Wir identifizieren $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ und betrachten das Vektorfeld X auf $\mathbb{C}^n$, das in der Trivialisierung $\chi : T\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ bezüglich der Karte $\mathrm{id} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch

$$z \mapsto \sqrt{-1} \cdot z, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^n.$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass

$$X(p) \in \mathrm{d}_p\iota(T_pS^{2n-1}), \qquad \forall\, p \in S^{2n-1}$$

und daher existiert ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf S^{2n-1}, das ι-verwandt zu X ist. Schließen Sie daraus, dass $\tilde{X}$ ein nullstellenloses Vektorfeld auf S^{2n-1} ist.

10-3 (2 Punkte) Es sei $\tau : S^n \to S^n$ die antipodale Abbildung $\tau(p) = -p$ und $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ die Quotientenabbildung $\pi(p) = [p]$. Es sei $\bar{X}$ ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{RP}^n$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges glattes Vektorfeld X auf S^n gibt, das π-verwandt ist zu $\bar{X}$. Zeigen Sie dazu, dass X notwendigerweise invariant unter τ ist (d.h. $\mathrm{d}_p\tau X(p) = X(\tau(p))$ für alle $p \in S^n$). *Hinweis: nehmen Sie das Differential der Identität* $\pi \circ \tau = \pi$.

(3 Punkte) Es sei umgekehrt X ein Vektorfeld auf S^n, das τ-invariant ist. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges glattes Vektorfeld $\bar{X}$ auf $\mathbb{RP}^n$ existiert, das π-verwandt ist mit X. *Hinweis: Um die Glattheit von* $\bar{X}$ *zu beweisen, betrachten Sie die offenen Mengen* U_i*, wo* π *invertierbar ist.*

Zur Info: Für $n > 0$ *existiert auf* S^{2n} *kein Vektorfeld ohne Nullstellen. Die einzigen Sphären* S^n *mit trivialem Tangentialbündel sind* S^0, S^1, S^3, S^7.