Differentialgeometrie 1 – Übungsblatt 1

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 25.4.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Auf diesem Aufgabenblatt sind Teilmengen von topologischen Räumen immer mit der Teilraumtopologie versehen und $\mathbb{R}^n$ *ist immer mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie versehen.*

Aufgaben zum Abgeben

1-1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ diffeomorph sind.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Abbildung $\varphi : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}$.
Finden Sie ausserdem einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und dem offenen Einheitswürfel $(0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$.

1-2 (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

eine topologische Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Graph}(f)$.

1-3 (2 Punkte) Geben Sie drei globale Karten $(\mathbb{R}, \varphi_1), (\mathbb{R}, \varphi_2), (\mathbb{R}, \varphi_3)$ für $\mathbb{R}$ an, sodass für alle $i \neq j \in \{1,2,3\}$ die Abbildung $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ kein Diffeomorphismus ist.

1-4 (4 Punkte) Es sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.
Beweisen Sie, dass $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = f(x)\}$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie $\dim(M)$.

Aufgaben nicht zum Abgeben (Vorbereitung für die Klausur)

1-5 Es sei $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0 \text{ und } xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Ist L eine topologische Mannigfaltigkeit?

1-6 Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau welche Teilräume $N \subset \mathbb{R}$ topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n sind.