Einführung: Fundamentalgruppe & Überlagerung

Wiederholung: X top. Raum, $x_0 \in X$ Basispunkt, $\pi_1(X, x_0)$ Fundamentalgruppe
Topologische Räume mit nicht-isomorphen Fundamentalgruppe sind nicht homöomorph (homotopieäquivalent).
Im Allg. ist es schwer Fundamentalgruppen zu berechnen.

⌈Heute: Verbinde Fundamentalgruppe mit geom. Konst.⌋

Algebr. Geometrisch

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Untergruppe} \\ \text{von } \pi_1(X, x_0) \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{Überlagerung} \\ p : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \to (M, x_0) \end{matrix} \right\} / \text{Isomorphie}$$

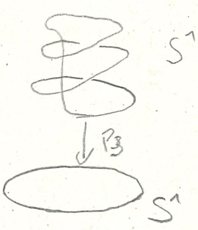
$$p_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)) \longleftarrow\!\!| \; (\tilde{M}, \tilde{x}_0)$$

2. Überlagerungen

M Mfkt. ⌈Gilt mit zsl. Bedingungen auch für topolog. Räume⌋

Def. Eine Überlagerung von M ist eine Mfkt. $\tilde{M}$ zusammen mit einer stetigen surjektiven Abb. $p : \tilde{M} \to M$, so dass es zu jedem $x \in M$ eine Umg. U gibt, für die $p^{-1}(U) \subset \tilde{M}$ aus einer Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen S_i besteht, die jeweils mittels p homöomorph auf U abgebildet werden.

Bsp.: $M = S^1$, $\tilde{M}_n = S^1$, $p_n(z) = z^n$, $n \geq 1$ (n-fache Überlagerung)



$\tilde{M} = \mathbb{R}$, $p(t) = e^{2\pi i t}$

T^2: $\tilde{M} = \mathbb{R}^2$

S^2: $S^2 \sqcup S^2$ $p(x, q) = q$ $\rightsquigarrow$ Nehmen an $\tilde{M}$ (und M) sind wegzsh..

Notation: Die Zusammenhangskomp. von $\pi^{-1}(U)$ heißen Blätter über U.
Ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend ($\pi_1(\tilde{M}, x_0) = 0$) so heißt $p : \tilde{M} \to M$ universelle Überlager.

Def: Eine Anhebung einer Abbildung $f : N \to M$ ist eine Abbildung $\tilde{f} : N \to \tilde{M}$ s.d. $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Fakten · Für jeden Pfad $f : I \to M$ mit Anfangspkt x_0 und für jedes $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es genau eine Anhebung $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ mit Anfangspkt. $\tilde{x}_0$.

· Für jede Homotopie $f_t : I \to X$ von Pfaden mit Anfangspkt. x_0 und jedes $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gibt es genau eine angehob. Homotopie $\tilde{f}_t : I \to \tilde{X}$ von Pfaden mit ~~Start~~ Anfangspkt. $\tilde{x}_0$.

· Die Anhebung einer Schleife muss nicht geschlossen sein.

Def: Ein **Isomorphismus** zwischen Überlagerungen $p_i: \tilde M_i \to M$ ist ein Diffeo. $f: \tilde M_1 \to \tilde M_2$ s.d. $p_1 = p_2 \circ f$.

Ein Isomorphismus $\tilde X \to \tilde X$ heißt **Decktransformation**. $G(\tilde X)$ - Gruppe der Decktransf.

3. Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe

Wd.: Eine Abb $\varphi: M \to N$ induziert einen Homomorphismus $\varphi_*: \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, y_0)$ durch

$$\varphi_*[f] = [\varphi \circ f].$$

Prop.: Die Abb. $p_*: \pi_1(\tilde M, \tilde x_0) \to \pi_1(M, x_0)$ induziert durch die Überlagerung $p: (\tilde M, \tilde x_0) \to (M, x_0)$ ist injektiv. ($\pi_1(\tilde M, \tilde x_0)$ „ist" Untergruppe von $\pi_1(M, x_0)$.)

⌈Die Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)) \le \pi_1(X, x_0)$ besteht aus den Homotopieklassen von Schleifen in X mit Startpunkt x_0, deren Anhebungen beginnend mit $\tilde x_0$ Schleifen sind.⌋

Prop.: Die Anzahl der Blätter einer Überlagerung $p: (\tilde M, \tilde x_0) \to (M, x_0)$ entspricht dem Index von $p_*(\pi_1(\tilde M, \tilde x_0))$ in $\pi_1(M, x_0)$.
Insb. ist die Kardinalität der Fasern $p^{-1}(x)$ konstant in $x \in M$ ($M; \tilde M$ zsh.).

Prop: (Anhebungs-Kriterium) $p: (\tilde M, \tilde x_0) \to (M, x_0)$ Überlagerung, $f: (N, y_0) \to (M, x_0)$, N wegzsh.. Dann ex. Anhebung $\tilde f: (N, y_0) \to (\tilde M, \tilde x_0)$ von f g.d.w. $f_*(\pi_1(N, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde M, \tilde x_0))$

Bsp: $p_3: S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^3$, $f: S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^2$.

Prop: Für jede Untergruppe $H \subset \pi_1(M, x_0)$ gibt es eine Überlagerung $p: M_H \to M$ so dass
$p_*(\pi_1(M_H, \tilde x_0)) = H$ für einen passend gewählten Basispkt. $\tilde x_0 \in M_H$.

Prop: Zwei wegzsh. Überlagerungen $p_i: \tilde M_i \to M$ sind isomorph mittels eines Isomorphismus welcher den Basispkt $\tilde x_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ auf den Basispkt. $\tilde x_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ abbildet g.d.w.
$p_{1*}(\pi_1(\tilde M_1, \tilde x_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde M_2, \tilde x_2))$.

Kor: Universelle Überlagerung ist eindeutig bis auf Isomorphie $\angle \circledast_1$

Thm: $p: (\tilde M, \tilde x_0) \to (M, x_0)$, $H := p_*(\pi_1(\tilde M, \tilde x_0)) \le \pi_1(M, x_0)$

(a) p ist normal $\Leftrightarrow$ $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$ normal

(b) $G(\tilde M) \simeq N(H)/H$, $N(H)$ der Normalisator von H in $\pi_1(M, x_0)$

Insb.:
- $G(\tilde M) \simeq \pi_1(X, x_0)/H$, falls $\tilde X$ normale Überlagerung
- $G(\tilde M) \simeq \pi_1(X)$ für die universelle Überlagerung.

Kor. $\{1\} \le \pi_1(X)$ Untergruppe $\Rightarrow$ Für jeden Raum gibt es eine universelle Überlagerung

Satz: Jede Überlagerung einer Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit. Die glatte Struktur der Überlagerung ist durch die der Basis festgelegt, falls π glatt werden soll.