G. Benedetti, U. Fuchs

Nachklausur zur Vorlesung Differentialgeometrie I am 11. Oktober 2019

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Übungsleiter:

Beginn der Klausur: ca. 9:15 Uhr, Dauer: 120 Minuten.

Schreiben Sie Ihre Lösungen zu Aufgaben 1-4 in die Kästen nach den jeweiligen Aufgaben.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bei Bedarf erhalten Sie mehr Papier. Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte“ (dokumentenecht) erfolgen.

Die Heftung dürfen Sie während der Klausur entfernen, bei Abgabe werden alle Blätter von uns zusammengeheftet.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	7	9	9	7	32
erreichte Punkte					

Note:

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 1

(a) (2 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf dem offenem Intervall $(0,3) \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Überdeckung

$$\{(0,2),\ (1,3)\}.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass eine glatte Funktion $e_3 : \mathbb{R} \to [0,1]$ existiert mit $e_3(t) = 0$ für $t \leq 0$, $e_3(t) = 1$ für $t \geq 1$ und $e_3(t) + e_3(1-t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) (1 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf $(0,3) \times (0,3) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Überdeckung

$$\{(0,2) \times (0,3),\ (1,3) \times (0,3)\}.$$

(c) (4 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf $(0,3) \times (0,3) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Überdeckung

$$\{(0,2) \times (0,2),\ (1,3) \times (0,2),\ (0,3) \times (1,3)\}.$$

Lösung

Wenn f eine glatte Funktion ist, kennzeichnen wir mit $T(f)$ den Träger von f.

(a) Wir setzen $\rho_1, \rho_2 : (0,3) \to \mathbb{R}$ als $\rho_1(t) := e_3(5-3t)$ und $\rho_2 : (t) = e_3(3t-4)$ für alle $t \in (0,3)$. Dann

  (i) **(1 Punkt)** $T(\rho_1) \subset (0, 5/3] \subset (0,2)$, $T(\rho_2) \subset [4/3, 3) \subset (1,3)$ und

  (ii) **(1 Punkt)** $\rho_1(t) + \rho_2(t) = e_3(1-(3t-4)) + e_3(3t-4) = 1$ für alle $t \in (0,3)$.

(b) **(1 Punkt)** Wir nehmen $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2 : (0,3) \times (0,3) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\rho}_1(x,y) = \rho_1(x)$ und $\tilde{\rho}_2(x,y) = \rho_2(x)$. Dann ist $T(\tilde{\rho}_1) \subset (0,5/3] \times (0,3) \subset (0,2) \times (0,3)$, $T(\tilde{\rho}_2) \subset [4/3,3) \times (0,3) \subset (1,3) \times (0,3)$ und $\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 = 1$.

(c) **(1 Punkt)** Eine Zerlegung bezüglich $\{(0,2) \times (0,2),\ (1,3) \times (0,2)\}$ ist durch die Einschränkung von $\tilde{\rho}_1$ und $\tilde{\rho}_2$ gegeben. Eine Zerlegung bezüglich $\{(0,3) \times (0,2), (0,3) \times (1,3)\}$ ist durch $\tilde{\sigma}_1(x,y) = \rho_1(y)$ und $\tilde{\sigma}_2(x,y) = \rho_2(y)$ gegeben.

(1 Punkt) Daher ist die gewünschte Zerlegung durch

$$\{\tau_1 := \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1, \tau_2 := \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_2, \tau_3 := \tilde{\sigma}_2\}$$

gegeben. Denn **(1 Punkt)**

$$T(\tau_1) \subset (0,5/3] \times (0,5/3], \quad T(\tau_2) \subset [4/3,3) \times (0,5/3], \quad T(\tau_3) \subset (0,3) \times [4/3,3)$$

und $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1 + \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_2 + \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2) + \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 = 1$ **(1 Punkt)**.

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 2

Es sei $N := \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$, wobei $\mathbb{RP}^2$ die reell projektive Ebene ist. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkt) N ist eine wohldefinierte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{RP}^2$;

(b) (3 Punkte) N ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{RP}^2$;

(c) (3 Punkte) N ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{RP}^2$;

(d) (1 Punkt) N hat Dimension 1.

Lösung.

Es seien $U_x = \{x \neq 0\}, U_y = \{y \neq 0\}$ und $U_z = \{z \neq 0\}$ die offenen Teilmengen von $\mathbb{RP}^2$, die die Definitionsbereiche der Standardkarten φ_x, φ_y und φ_z sind. Zum Beispiel $\varphi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_z([x : y : z]) = (x/z, y/z)$.

(a) Wir zeigen, dass N wohldefiniert ist **(1 Punkt)**. Wenn $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, dann gilt

$$(x')^3 + (y')^3 + (z')^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Außerdem gehören die Punkte $[1 : -1 : 0]$, $[0 : 1 : -1]$ und $[-1 : 0 : 1]$ zu N, sodass N nicht leer ist **(1 Punkt)**.

(b) Da $\mathbb{RP}^2$ kompakt ist, genügt es zu zeigen, dass N abgeschlossen ist **(0,5 Punkte)**. Nun ist N abgeschlossen genau dann wenn $N^c := \mathbb{RP}^2 \setminus N$ offen ist. Um zu zeigen, dass N^c offen ist, reicht es zu zeigen, dass $N^c \cap U_x$, $N^c \cap U_y$ und $N^c \cap U_z$ offen sind **(1 Punkt)**, weil

$$N^c = N^c \cap \mathbb{RP}^2 = N^c \cap \Big(U_x \cup U_y \cup U_z\Big) = (N^c \cap U_x) \cup (N^c \cap U_y) \cup (N^c \cap U_z).$$

Wir führen das Argument nur für U_z durch und schreiben (u, v) für die Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$, die durch φ_z gegeben sind.

Für alle $[x : y : z] \in U_z$ gilt **(1 Punkt)**

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{z}\right)^3 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u^3 + v^3 + 1 = 0.$$

Dann gilt

$$\varphi_z(N^c \cap U_z) = \{u^3 + v^3 + 1 \neq 0\}$$

und diese Menge ist offen, da die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto u^3 + v^3 + 1$ stetig ist **(0,5 Punkte)**. Alternative Lösung: Wir betrachten die Teilmenge $\tilde{N} := S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3\}$ von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ **(1 Punkt)**. Diese Teilmenge ist kompakt, da abgeschlossen (da $x^2 + y^2 + z^2$ und $x^3 + y^3 + z^3$ stetige Funktionen sind) und Teilmenge von S^2, welche eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist. Es sei nun $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion. Dann $\pi(\tilde{N}) = N$. Die Inklusion $\pi(\tilde{N}) \subset N$ ist klar. Wenn nun $[x : y : z] \in N$, gibt es einen Repräsentanten mit $(x, y, z) \in S^2$. Da $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ gilt, ist $(x, y, z) \in \tilde{N}$. Da π stetig ist, ist N auch kompakt.

(c) Um zu zeigen, dass N eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{RP}^2$ der Dimension 1 ist, reicht es zu zeigen, dass $N \cap U_x$, bzw. $N \cap U_y$, bzw. $N \cap U_z$ glatte Untermannigfaltigkeiten von U_x, bzw. U_y, bzw. U_z der Dimension 1 sind **(1 Punkt)**.

Wir führen das Argument nur für U_z durch. Da $\varphi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass $\varphi(N \cap U_z) = \{u^3 + v^3 + 1 = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Wir betrachten dazu die glatte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(u, v) = u^3 + v^3 + 1$, sodass $\{u^3 + v^3 + 1 = 0\} = f^{-1}(0)$. Wir zeigen nun, dass f eine Submersion an allen $(u, v) \neq 0$. Wir berechnen dazu die Jacobi-Matrix von f

$$\mathrm{d}f = (3u^2, 3v^2),$$

die Rang 1 genau dann besitzt, wenn $(u, v) \neq 0$. Da $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, folgt es, dass f eine Submersion an allen Punkten in $f^{-1}(0)$ **(1 Punkt)**. Nach Satz 5.26 folgt, dass $U_z \cap N$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 von U_z ist **(1 Punkt)**.

(d) Wir haben somit gezeigt, dass N Dimension 1 besitzt **(1 Punkt)**.

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 3

Es sei $G := GL_n(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit der glatten Struktur gegeben als offene Teilmenge des Vektorraums der $n \times n$-Matrizen $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$. Insbesondere können wir Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(G)$ mit glatten Abbildungen $X : G \to \mathfrak{g}$ identifizieren.
Für alle $A \in \mathfrak{g}$ sei $L_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die glatte Abbildung $L_A(B) = A \cdot B$, wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation ist. Auf ähnlicher Weise definieren wir $R_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die glatte Abbildung $R_A(B) = B \cdot A$. Insbesondere wenn $A \in G$ bekommen wir Einschränkungen $L_A : G \to G$ und $R_A : G \to G$.
Man nennt ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ *linksinvariant*, wenn für alle $A \in G$ das Vektorfeld X L_A-verwandt mit sich selbst ist. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Es gilt $\mathrm{d}_B L_A \cdot H = A \cdot H = L_A(H)$ und $\mathrm{d}_B R_A \cdot H = H \cdot A = R_A(H)$ für alle $A, B \in G$ und $H \in \mathfrak{g} \cong T_B G$.

(b) (2 Punkte) Für alle $H \in \mathfrak{g}$ ist das Vektorfeld $R_H \in \mathfrak{X}(G)$ linksinvariant. Für $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}$, gilt ausserdem $R_{H_1} = R_{H_2}$ genau dann, wenn $H_1 = H_2$.

(c) (2 Punkte) Für jedes linksinvariante $X \in \mathfrak{X}(G)$ existiert ein $H \in \mathfrak{g}$, sodass $X = R_H$.

(d) (3 Punkte) Für alle $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}$ gilt $[R_{H_1}, R_{H_2}] = R_{H_1 \odot H_2}$, wobei

$$H_1 \odot H_2 := H_1 \cdot H_2 - H_2 \cdot H_1$$

der Kommutator der Matrizen H_1 und H_2 ist.

(e) (1 Punkt) Wenn $n = 3$, bestimmen Sie $[R_{H_1}, R_{H_2}] : G \to \mathfrak{g}$ explizit, wobei

$$H_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung.

(a) **(1 Punkt)** Die Kurve $t \mapsto (B + tH)$ läuft durch B mit Tangentialvektor H. Daher,

$$\mathrm{d}_B L_A \cdot H = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (A \cdot (B + tH)) = A \cdot H.$$

Die Aussage für R_A folgt auf ähnlicher Weise.

(b) Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{d}_B L_A R_H(B) = R_H(L_A(B))$ **(0.5 Punkte)**. Wir berechnen **(1 Punkt)**

$$\mathrm{d}_B L_A \cdot R_H(B) = A \cdot R_H(B) = A \cdot (B \cdot H) = (A \cdot B) \cdot H = R_H(A \cdot B) = R_H(L_A(B)).$$

Es sei E die Identitätsmatrix. Wir finden aus $R_{H_1} = R_{H_2}$, dass $H_1 = R_{H_1}(E) = R_{H_2}(E) = H_2$ **(0.5 Punkte)**.

(c) Wir setzen $H := X(E)$ **(1 Punkt)**. Dann bekommen wir für ein beliebiges $A \in G$

$$X(A) = X(A \cdot E) = X(L_A(E)) = \mathrm{d}_E L_A \cdot X(E) = \mathrm{d}_E L_A \cdot H = A \cdot H = R_H(A),$$

wobei wir die Linksinvarianz von X und die Formel in (a) benutzt haben **(1 Punkt)**.

(d) Da G eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, können wir die Formel (8.12) für Lie Klammer zwischen $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ benutzen **(1 Punkt)**:

$$[X,Y](A) = \mathrm{d}_A Y \cdot X(A) - \mathrm{d}_A X \cdot Y(A), \quad \forall\, A \in G.$$

Nach (a) gilt es **(1 Punkt)**

$$\mathrm{d}_A R_{H_2} \cdot R_{H_1}(A) = (A \cdot H_1) \cdot H_2 = A \cdot (H_1 \cdot H_2).$$

Auf ähnlicher Weise $\mathrm{d}_A R_{H_1} \cdot R_{H_2}(A) = A \cdot (H_2 \cdot H_1)$. Daher **(1 Punkt)**

$$[R_{H_1}, R_{H_2}](A) = A \cdot (H_1 \cdot H_2 - H_2 \cdot H_1) = A \cdot (H_1 \odot H_2) = R_{H_1 \odot H_2}(A).$$

(e) **(1 Punkt)** Wir berechnen den Kommutator

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Also

$$[R_{H_1}, R_{H_2}](A) = A \cdot \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&a_1^1\\0&0&a_1^2\\0&0&a_1^3\end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \; A = \begin{pmatrix}a_1^1&a_2^1&a_3^1\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3\end{pmatrix}.$$

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei $\gamma : (a,b) \to (0,\infty) \times \mathbb{R}$ eine eingebettete Kurve mit Koordinaten $\gamma = (r,z)$, sodass $(r')^2(\theta) + (z')^2(\theta) = 1$ für alle $\theta \in (a,b)$, wobei ein Strich die Ableitung bezüglich θ gekennzeichnet. Wir definieren die Einbettung

$$\psi : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\theta,\phi) := \Big(r(\theta)\cos\phi, r(\theta)\sin\phi, z(\theta)\Big).$$

Dann ist $M := \psi\big((a,b) \times (0,2\pi)\big)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Wir haben den Rahmen $X := \partial_\theta$, $Y := \frac{1}{r(\theta)}\partial_\phi$ für TM. Die Levi-Civita kovariante Ableitung ∇ auf TM wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\nabla X = r' \mathrm{d}\phi \otimes Y, \qquad \nabla Y = -r' \mathrm{d}\phi \otimes X.$$

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Matrix ω der Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich des Rahmens X, Y von TM.

(b) (4 Punkte) Es seien $a < \theta_0 < \theta_1 < b$, $0 < \phi_0 < \phi_1 < 2\pi$ und $\delta_\theta := \theta_1 - \theta_0$, $\delta_\phi := \phi_1 - \phi_0$. $\beta : [0, 2(\delta_\theta + \delta_\phi)] \to M$ die stetige, stückweise glatte Kurve

$$\beta(t) = \begin{cases} \psi(t + \theta_0, \phi_0) & t \in [0, \delta_\theta] \\ \psi(\theta_1, t - \delta_\theta + \phi_0) & t \in [\delta_\theta, \delta_\theta + \delta_\phi] \\ \psi(\theta_1 - (t - \delta_\theta - \delta_\phi), \phi_1) & t \in [\delta_\theta + \delta_\phi, 2\delta_\theta + \delta_\phi] \\ \psi(\theta_0, \phi_1 - (t - 2\delta_\theta - \delta_\phi)) & t \in [2\delta_\theta + \delta_\phi, 2(\delta_\theta + \delta_\phi)]. \end{cases}$$

Finden Sie die Parallelverschiebung $P^\beta_{0,2(\delta_\theta+\delta_\phi)} : T_{\psi(\theta_0,\phi_0)} \to T_{\psi(\theta_0,\phi_0)}$ entlang der Kurve β als Verkettung der Parallelverschiebungen entlang der vier glatten Stücke von β. Zeigen Sie, dass $P^\beta_{0,2(\delta_\theta+\delta_\phi)}$ eine Drehung um den Winkel $(\phi_1 - \phi_0)(r'(\theta_0) - r'(\theta_1))$ bezüglich des Rahmens X, Y ist.

(c) (2 Punkte) Es sei nun $\gamma(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta)$ mit $\theta \in (0,\pi)$, sodass M eine offene Teilmenge von S^2 ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall ∇ nicht flach ist.

Lösung.

(a) **(1 Punkt)** Wir nehmen die Trivialisierung von TM, die X zu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und Y zu $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zuordnet. Dann

$$\nabla \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = r'\mathrm{d}\phi \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\r'\mathrm{d}\phi\end{pmatrix}, \qquad \nabla \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -r'\mathrm{d}\phi \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r'\mathrm{d}\phi\\0\end{pmatrix}.$$

Also

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -r'\mathrm{d}\phi \\ r'\mathrm{d}\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wenn $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ glatt mit Koordinaten $(\theta,\phi) : [t_0,t_1] \to (a,b) \times (0,2\pi)$ ist, dann ist ein Vektorfeld entlang γ genau dann ∇-parallel, wenn seine Darstellung $\xi : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^2$ bezüglich des Rahmens X, Y der Gleichung **(1 Punkt)**

$$\dot\xi + \omega(\dot\gamma) \cdot \xi = 0$$

genügt. Nach (a) lässt sich diese Formel umschreiben als **(0,5 Punkte)**

$$\dot{\xi}(t) = -r'(\theta(t))\dot{\phi}(t)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\xi(t), \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1]. \tag{$\star$}$$

Wir kennzeichnen nun die vier glatten Stücke von β als $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Wenn $\gamma = \beta_1$, bekommen wir aus $(\star)$

$$\dot{\xi}(t) = -r'(\theta(t))\cdot 0\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\xi(t) = 0, \qquad \forall\, t \in [0, \delta_\theta].$$

Also ist ξ konstant und $P^{\beta_1}_{0,\delta_\theta} = \mathrm{id}$ **(1 Punkt)**.

Wenn $\gamma = \beta_2$, bekommen wir aus $(\star)$

$$\dot{\xi}(t) = -r'(\theta_1)\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\xi(t), \qquad \forall\, t \in [\delta_\theta, \delta_\theta + \delta_\phi].$$

Also dreht sich ξ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $-r'(\theta_1)$ für eine Zeit $\delta_\theta + \delta_\phi - \delta_\theta = \delta_\phi = \phi_1 - \phi_0$. Deshalb ist die Parallelverschiebung $P^{\beta_2}_{\delta_\theta,\delta_\theta+\delta_\phi}$ die Drehung um den Winkel $-r'(\theta_1)\cdot(\phi_1 - \phi_0)$ **(1 Punkt)**.

Wenn $\gamma = \beta_3$, bekommen wir nochmal $\dot{\xi} = 0$. Also ist $P^{\beta_3}_{\delta_\theta+\delta_\phi,2\delta_\theta+\delta_\phi} = \mathrm{id}$.

Schließlich wenn $\gamma = \beta_4$, bekommen wir aus $(\star)$

$$\dot{\xi}(t) = -r'(\theta_0)\cdot(-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\xi(t), \qquad \forall\, t \in [2\delta_\theta + \delta_\phi, 2\delta_\theta + 2\delta_\phi].$$

Also dreht sich ξ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $r'(\theta_0)$ für eine Zeit $2\delta_\theta + 2\delta_\phi - 2\delta_\theta - \delta_\phi = \delta_\phi = \phi_1 - \phi_0$. Deshalb ist $P^{\beta_4}_{2\delta_\theta+\delta_\phi,2\delta_\theta+2\delta_\phi}$ die Drehung um den Winkel $r'(\theta_0)\cdot(\phi_1 - \phi_0)$.

Da P^β die Verkettung von P^{β_1}, P^{β_2}, P^{β_3} und P^{β_4} ist, finden wir, dass P^β eine Drehung um den Winkel $(r'(\theta_0) - r'(\theta_1))\cdot(\phi_1 - \phi_0)$ bezüglich des Rahmens X, Y ist **(0,5 Punkte)**.

(c) Für die Sphäre gilt $r(\theta) = \sin\theta$ und $r'(\theta) = \cos\theta$, sodass P^β die Drehung von Winkel $(\cos\theta_0 - \cos\theta_1)\cdot(\phi_1 - \phi_0)$ ist. Insbesondere liegt dieser Winkel im Intervall $(0, 2\pi)$, wenn $\theta_0 < \theta_1$ und $\phi_0 < \phi_1 < \phi_0 + \pi$ und daher ist P^β nicht die Identität **(1 Punkt)**.

Es sei nun angenommen, dass ∇ flach um (θ_0, ϕ_0) ist. Nach Folgerung 8.33 gibt es eine Umgebung U von (θ_0, ϕ_0), sodass für jede geschlossene Kurve γ mit Bild in U $P^\gamma = \mathrm{id}$ gilt. Es existieren $\theta_1 \in (\theta_0, \pi)$ und $\phi_1 \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$ mit $\theta_1 - \theta_0$ und $\phi_1 - \phi_0$ klein genug, sodass das Bild von β in U enthalten ist. Dann sollte $P^\beta = \mathrm{id}$ sein, im Widerspruch zu der Tatsache, dass $(\cos\theta_0 - \cos\theta_1)\cdot(\phi_1 - \phi_0) \in (0, 2\pi)$ gilt **(1 Punkt)**.