G. Benedetti, U. Fuchs

Klausur zur Vorlesung Differentialgeometrie I
am 31. Juli 2019

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Übungsleiter:

Beginn der Klausur: ca. 9:15 Uhr, Dauer: 120 Minuten.

Schreiben Sie Ihre Lösungen zu Aufgaben 1-4 in die Kästen nach den jeweiligen Aufgaben.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bei Bedarf erhalten Sie mehr Papier. Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte“ (dokumentenecht) erfolgen.

Die Heftung dürfen Sie während der Klausur entfernen, bei Abgabe werden alle Blätter von uns zusammengeheftet.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	6	8	8	10	32
erreichte Punkte					

Note:

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 1

Es sei

$$L := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \geq 0 \text{ und } xy = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

vorgesehen mit dem Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$.

(a) (3 Punkte) Ist L eine topologische Mannigfaltigkeit?

(b) (3 Punkte) Ist L eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x,y,z) := \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine glatte Funktion auf $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\tilde{f} = f \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$ die Quotientenabbildung ist.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Menge

$$Z := \left\{ p \in \mathbb{RP}^2 \;\middle|\; \mathrm{d}_p f = 0 \right\}.$$

(c) (2 Punkte) Benutzen Sie die Funktion f und eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{RP}^2$, um ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{RP}^2$ mit genau drei Nullstellen zu finden.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Formel benutzen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{au^2 + bv^2 + c}{u^2 + v^2 + 1}\right) = 2u\frac{\big((a-b)v^2 + (a-c)\big)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \qquad \forall\, a, b, c, u, v \in \mathbb{R}.$$

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 3

Die Lage eines Schlittschuhs auf einer Eisfläche wird durch einen Punkt (x, y, θ) in der Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ bestimmt, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Lage des Mittelpunkts des Schuhs und $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ den Winkel zwischen der Schuhrichtung und der x-Achse beschreiben. Aus physikalischen Gründen müssen die *möglichen Bahnen* $\gamma := (x, y, \theta) : (a, b) \to M$ eines Schlittschuhs die folgende Eigenschaft erfüllen:

Die Geschwindigkeit des Mittelpunkts des Schuhs ist parallel zur Schuhrichtung. $(*)$

(a) (2 Punkte) Wir schreiben den Tangentialvektor einer *möglichen Bahn* in Koordinaten als

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{\theta}\partial_\theta.$$

Übersetzen Sie die Eigenschaft $(*)$ durch eine Gleichung für die Koeffizienten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$.

(b) (2 Punkte) Wir betrachten die Vektorfelder $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben als

$$X = (\cos\theta)\partial_x + (\sin\theta)\partial_y, \qquad Z = \partial_\theta.$$

Zeigen Sie, dass, für alle *möglichen Bahnen* γ des Schuhs, der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ als lineare Kombination von $X(\gamma(t))$ und $Z(\gamma(t))$ für alle $t \in (a, b)$ geschrieben werden kann.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Lie-Klammer $Y := [X, Z]$ und zeigen Sie, dass (X, Y, Z) einen Rahmen für TM bilden.

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie $[Y, Z]$ und $[X, Y]$ als Linearkombination von X, Y, Z.

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei $\gamma : (\theta_0, \theta_1) \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine eingebettete Kurve mit Koordinaten $\gamma = (r, z)$, sodass $\dot{r}^2(\theta) + \dot{z}^2(\theta) = 1$ für alle $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$. Wir definieren die Einbettung

$$\psi : (\theta_0, \theta_1) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\theta, \phi) := \Big(r(\theta)\cos\phi, r(\theta)\sin\phi, z(\theta)\Big).$$

Dann ist $M := \psi\big((\theta_0, \theta_1) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\big)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Die Levi-Civita kovariante Ableitung ∇ auf TM wird durch die folgende Gleichungen bestimmt:

$$\nabla\partial_\theta = \frac{\dot{r}}{r}\mathrm{d}\phi \otimes \partial_\phi, \qquad \nabla\partial_\phi = \frac{\dot{r}}{r}\mathrm{d}\theta \otimes \partial_\phi - r\dot{r}\mathrm{d}\phi \otimes \partial_\theta.$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie $\nabla\big(\frac{1}{r}\partial_\phi\big)$.

(b) (2 Punkte) Schreiben Sie die Matrix ω der Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich des Rahmens $\partial_\theta, \frac{1}{r}\partial_\phi$ von TM.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrix der 2-Formen Ω, welche die Krümmung von ∇ bezüglich des Rahmens $\partial_\theta, \frac{1}{r}\partial_\phi$ darstellt.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine Funktion $K : (\theta_0, \theta_1) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\Omega\Big(\partial_\theta, \frac{1}{r}\partial_\phi\Big) = K(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) (2 Punkte) Finden Sie $\theta \mapsto K(\theta)$, wenn M ein Kegel vom Halbwinkel α oder eine Sphäre von Radius R ist.

(f) (2 Punkte) Finden Sie $\gamma = (r, z) : (0, +\infty) \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit $\dot{r}^2 + \dot{z}^2 = 1$, sodass $K \equiv -1$ und die Randbedingungen

$$\lim_{\theta\to+\infty} r(\theta) = 0, \qquad \lim_{\theta\to 0}(r(\theta), z(\theta)) = (1, 0)$$

gelten. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\theta\to+\infty} |\dot{z}(\theta)| = 1, \qquad \lim_{\theta\to+\infty} |z(\theta)| = +\infty$$

und skizzieren Sie M in diesem Fall.

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . Matrikel-Nr.: . . . .