Einführung: Fundamentalgruppe & Überlagerung

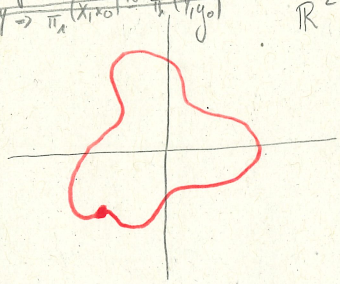
0. Zielsetzung

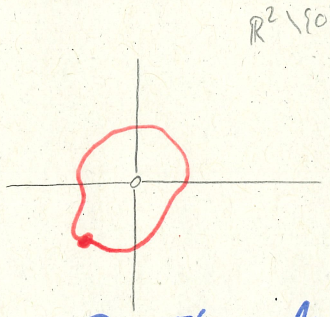
∠ Unterscheide Mannigfaltigkeiten (topol. Räume)

Beispiel:
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nicht homöomorph (zusammenhängend)
- S^2, $\mathbb{R}^2$ —"— (kompakt)
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ —"— (Zusammenhangsargument)

Frage: Wie unterscheiden wir $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$?
S^2 und $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$?

Idee: ~~X top. Raum, bilde Gruppe $\pi_1(X,x_0)$~~
~~$X \cong Y \Rightarrow \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$~~





Jede geschlossene Kurve lässt sich durch einen Pfad geschlossener Kurven auf einen Punkt zusammenziehen.

Die Kurve, die einmal den Ursprung umrundet lässt sich in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen.

1. Fundamentalgruppe

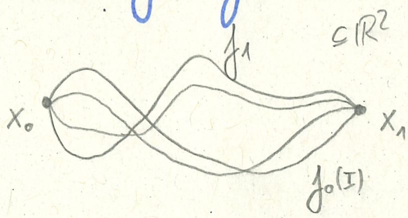
∠ X topol. Raum.

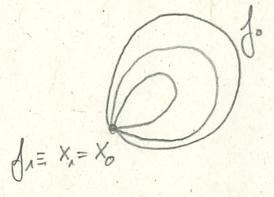
Idee: Die Fundamentalgruppe besteht aus allen Schleifen (geschlossene Kurven) mit festem Basispunkt x_0. Zwei Schleifen sind gleich, falls sie durch stetige Deformation in X ineinander übergehen (alle dabei auftretenden Schleifen beginnen und enden in x_0).

⌈Fragen: Gruppenstruktur?, "stetige Deformation"?⌋

Homotopie (Wiederholen?)

Def:
- Ein **Pfad** in X ist eine stetige Abb. $f: I := [0,1] \to X$. ∠ Spezialfall: $f(0) = f(1) =: x_0$: **Schleife** mit Basispkt. x_0.
- Eine **Homotopie von Pfaden** in X ist eine Familie $f_t : I \to X$, $0 \leq t \leq 1$, mit
  (1) Endpunkte $x_0 = f_t(0)$ & $x_1 = f_t(1)$ sind unabh. von t.
  (2) Die zugeh. Abb. $F: I \times I \to X$ geg. durch $F(s,t) = f_t(s)$ ist stetig.
- f_0, f_1 Pfade heißen **homotop**, falls es eine Homotopie F mit $F(s,0) = f_0(s)$ $F(s,1) = f_1(s)$ gibt.





Beispiel (Lineare Homotopie): $f_0, f_1 : I \to \mathbb{R}^n$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt

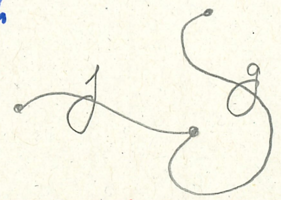
$$f_t(s) = (1-t)\cdot f_0(s) + t \cdot f_1(s)$$

$\Rightarrow$ Alle Pfade in $\mathbb{R}^n$ sind homotop.

Prop: Homotopie von Pfaden mit festen Endpunkten ist eine Äquivalenzrelation. $\rightsquigarrow$ "stetige Def".

Def: $f, g : I \to X$, $f(1) = g(0)$
Die Komposition / das Produkt $f\cdot g$ von f und g ist gegeben durch

$$f\cdot g\,(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ g(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$



⌈Durchlaufe f & g mit doppelter Geschwindigkeit $\rightsquigarrow$ $f\cdot g$ durchlaufe mit Einheitszeit.
Das Produkt wird von links nach rechts gelesen.⌋

Prop: $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, $f_0(1) = g_0(0)$, dann ist $f_t \cdot g_t$ definiert und $f_0\cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$.
Insb. $[f]\cdot[g] = [f\cdot g]$.

Definiere $\pi_1(X, x_0) = \{$Homotopieklassen $[f]$ von Schleifen $f : I \to X$ mit Basispunkt $x_0\}$.

Prop.: $\pi_1(X, x_0)$ ist Gruppe mit dem Produkt $[f]\cdot[g] = [f\cdot g]$.

Bez:
- $\pi_1(X, x_0)$ heißt <u>Fundamentalgruppe</u> von X mit Basispunkt x_0
- X heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, falls ~~X~~ wegzusammenhängend ist und triviale Fundamentalgruppe hat.

Satz / Beispiele:
- $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$, mit Erzeuger $[\alpha]$, $\alpha(s) = e^{2\pi i s}$
- $\pi_1(S^n, *) \simeq 0$, $n \geq 2$
- $\pi_1(\mathbb{R}^n, *) \simeq 0$ (gilt für alle konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$).

Prop.: x_0, x_1 in der selb. Wegzsh. komp., dann $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$, schreibe $\pi_1(X)$

Prop: $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$, falls X, Y wegzsh.

Verhalten unter stetigen Abbildungen

$\varphi : X \to Y$ stetige Abb. $\varphi(x_0) = y_0$; x_0, y_0 Basispkte.
Schreibe $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$.
φ induziert einen Homomorphismus durch Verkettung: $f : I \to X$ Schleife, $\varphi\circ f : I \to Y$
Schreibe $\varphi_*[f] = [\varphi\circ f]$, also $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. „Push-forward".

Beachte:
- $\varphi(f\cdot g) = (\varphi f)\cdot(\varphi g)$
- $(\varphi\circ\psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$
- $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, $\mathbb{1} : X \to X$ Identität.

Übung 3
14. Okt 2013

Eigenschaften: • X, Y homotopieäquivalent wegzsh. $\Rightarrow \pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(Y,y_0)$

Homotopieäquivalent: Existieren $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ s.d. $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$.

• X, Y homöomorph $\Rightarrow \pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(Y,y_0)$.

Fazit: Wir haben erreicht: X top. Raum $\rightsquigarrow$ bilde Gruppe $\pi_1(X,x_0)$ so dass

$X \simeq Y$ homöomorph (homotopieäquivalent) $\Rightarrow \pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(Y,y_0)$ isomorph.

Alg. Obj unterscheidet top. Räume.

Ausblick: $\pi_n(X,x_0)$: $f: I^n \to X$ mit $f(\partial I^n) = x_0$.

Nächstes Mal: Verstehe die Fundamentalgruppe durch geometr. Objekte

Algebraisch ... Geometrisch

$$\left\{ \text{Untergruppen von } \pi_1(X,x_0) \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{Überlagerungen } p: (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0) \right\} / \text{Isomorphie}$$

$$p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)) \longleftarrow (\tilde{X},\tilde{x}_0).$$