

Diskrete Dynamik des mathematischen Billiards

Gautam Dilip Banhatti

Seminar: Integrable Hamiltonsche Systeme und das KAM-Theorem

Juniorprof. Gabriele Benedetti

Uni Heidelberg

15.1.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematisches Billiards als diskrete Dynamik	1
1.1	Was ist mathematisches Billiards?	1
1.2	Die Billiardkugelabbildung als Symplektomorphismus auf dem Phasenraum	2
1.3	Der Abstand als erzeugende Funktion	4
2	Kaustiken und Erhaltungsgrößen am Beispiel: Billiards in einer Ellipse	5
2.1	Billiards in einer Ellipse	5
2.2	Definition einer Kaustik	6
2.3	Erhaltungsgröße als Resultat der Kaustik	9
2.4	Vollständige Integrabilität im Liouvillschen Sinn, diskrete Version des Arnold-Liouville-Theorems	10
2.5	„Fadenkonstruktion“	12
2.6	Lazukin's Theorem	13

1 Mathematisches Billiards als diskrete Dynamik

1.1 Was ist mathematisches Billiards?

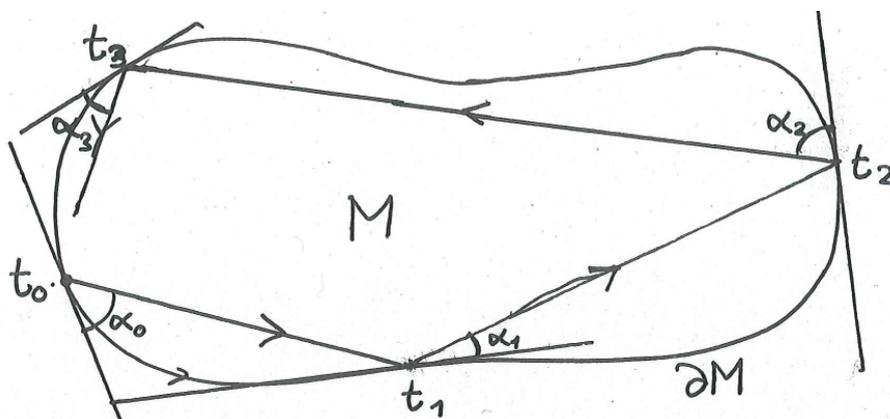


Abbildung 1: Mathematisches Billiards.

Das *Reflexionsgesetz* kann bekanntlich als „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ formuliert werden. Eine andere Beschreibung, welche leicht auf höhere Dimensionen übertragbar ist, lautet: Am Rand, wo reflektiert wird, ändert die orthogonale Komponente der Geschwindigkeit ihr Vorzeichen.

Eine Billiardtrajektorie innerhalb eines Gebietes ist in Abb. 1 dargestellt. Es gibt zwei interessante mathematische Beschreibungen dieses Konzeptes:

1. Billiardtrajektorie als geodätische Kurven auf einer unendlich dünnen, zweiseitigen Fläche.
2. Billiardtrajektorie als Dynamik auf dem Rand des Billiardtisches.

Im Folgenden werden wir uns mit der zweiten Beschreibung beschäftigen.

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen, zusammenhängend, und ∂M sei eine glatte, geschlossene Kurve. ∂M ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die (nach Bogenlänge parametrisierte) Koordinate auf ∂M sei mit t bezeichnet. Sei $L := \text{Länge von } \partial M > 0$. Die Koordinate t kann entweder als Element in $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} =: \mathbb{S}^1$ gesehen werden, oder wie folgt:

Sei $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatt, L -periodisch, $|\tilde{\gamma}'(u)| = 1 \forall u \in \mathbb{R}$, mit $\text{Bild}(\tilde{\gamma}) = \partial M$. Die Koordinate t sei dann als lokale Inverse von $\tilde{\gamma}$ definiert. Somit ist die Koordinate zwar nicht eindeutig, aber es gilt: Sind t und \tilde{t} zwei lokale Inversen von $\tilde{\gamma}$ mit gemeinsamen Definitionsbereich, so gilt: $t - \tilde{t} \in L \cdot \mathbb{Z}$, und somit $dt = d\tilde{t}$. Somit ist die 1-Form dt wohldefiniert. Wir haben folgendes kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\gamma} & \\ \mathbb{R}/L\mathbb{Z} & \xrightarrow{\gamma} & \partial M \end{array}$$

Die Geschwindigkeitsrichtung der Billiardtrajektorie werde durch eine Winkelkoordinate $\alpha \in (0; \pi) =: I$ beschrieben. Dabei sei

- $\alpha = 0$ die tangentielle Richtung entlang der Randorientierung,
- $\alpha = \pi/2$ die nach innen zeigende orthogonale Richtung,
- $\alpha = \pi$ die tangentielle Richtung, entgegengesetzt der Randorientierung.

Definition 1.1. *Definiere den Phasenraum als $V := \mathbb{S}^1 \times I$. Dabei sei $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Der Phasenraum V ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die Koordinaten seien $t \in \mathbb{S}^1$ und $\alpha \in I$.*

Die Billiardkugelabbildung $T : V \rightarrow V$ auf dem Phasenraum sei durch die Billiardreflektion definiert:

$$(t_0, \alpha_0) \xrightarrow{T} (t_1, \alpha_1) \xrightarrow{T} (t_2, \alpha_2) \xrightarrow{T} \dots$$

1.2 Die Billiardkugelabbildung als Symplektomorphismus auf dem Phasenraum

Ist T glatt? Die Antwort ist im Allgemeinen „Nein“, denn es können Probleme mit der Stetigkeit auftreten (vgl. Abb. 2).

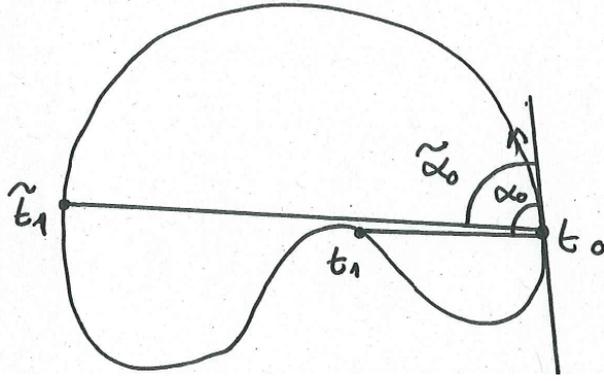


Abbildung 2: Probleme mit der Stetigkeit von T .

Proposition 1.2. Falls M konvex ist, und ∂M überall nicht-verschwindende Krümmung besitzt, d.h. $|\tilde{\gamma}''| \neq 0$, dann ist T glatt. \square

Im Folgenden nehmen wir daher an, dass M die Voraussetzungen der obigen Proposition erfüllt. Beachte jedoch, dass viele Resultate auch auf den nicht-konvexen Fall in evtl. abgeschwächter Form zutreffen, falls die Menge der „problematischen“ Punkte (z.B. wo T unstetig ist) oft nur eine Nullmenge, oder sogar diskrete oder endliche Menge im Phasenraum darstellt.

Definiere nun eine symplektische Struktur auf dem Phasenraum.

Definition 1.3. Sei $\omega := \sin \alpha \, d\alpha \wedge dt$ eine 2-Form auf V .

Proposition 1.4. ω ist eine symplektische Form auf V .

Beweis. Es gilt $d\omega = \cos \alpha \, d\alpha \wedge d\alpha \wedge dt = 0$, außerdem ist $d\alpha \wedge dt$ eine Volumenform, und $\sin \alpha > 0$ für $\alpha \in I$. Somit ist ω geschlossen und nicht degeneriert. \square

Es folgt nun, dass die Billiardkugelabbildung die symplektische Struktur erhält:

Proposition 1.5. $T : (v, \omega) \rightarrow (V, \omega)$ ist ein Symplektomorphismus.

Beweis. Schritt 1: T ist ein Diffeomorphismus. Dies sieht man, indem man erkennt, dass die „Rückwärts-Billiarddynamik“ durch leichte Modifikation der Abbildung T erhalten werden kann, welche somit auch glatt ist, und zudem eine Umkehrabbildung von T ist.

Schritt 2: Betrachte eine Abstandsfunktion $A : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A(t_1, t_2) := \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_2.$$

Nun ist $\partial_1 \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(p, q)$ genau der Einheitsvektor von q nach p . Somit folgt für die partiellen Ableitungen von A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \langle \partial_1 \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)), \gamma'(t_1) \rangle \\ &= |\partial_1 \text{dist}_{\mathbb{R}^2}| \cdot |\gamma'(t_1)| \cdot \cos \varphi_1 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Dabei sei $\alpha_1 \in I$ der Winkel, sodass $T(t_1, \alpha_1) = (t_2, \alpha_2)$. Auf ähnliche Weise folgt

$$\frac{\partial A}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \cos \alpha_2.$$

Schritt 3: Seien $\hat{t}, \hat{\alpha}$ die Komponentenfunktionen von T , d.h.

$$(t, \alpha) \xrightarrow{T} T(t, \alpha) = (\hat{t}(t, \alpha), \hat{\alpha}(t, \alpha)).$$

Definiere nun

$$\tilde{A} : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{A}(t, \alpha) := A(t, \hat{t}(t, \alpha)),$$

eine Funktion auf V . Für ihr äußeres Differential gilt:

$$d\tilde{A} = \frac{\partial A}{\partial t}(t, \hat{t})dt + \frac{\partial A}{\partial \hat{t}}(t, \hat{t})d\hat{t} = -\cos \alpha dt + \cos \hat{\alpha} d\hat{t}.$$

Betrachte die zweite Cartan-Ableitung:

$$0 = d^2 \tilde{A} = d(-\cos \alpha dt + \cos \hat{\alpha} d\hat{t}) = \sin \alpha d\alpha \wedge dt - \sin \hat{\alpha} d\hat{\alpha} \wedge d\hat{t} = \omega - T^* \omega.$$

Somit gilt $\omega = T^* \omega$, d.h. T ist ein Symplektomorphismus. □

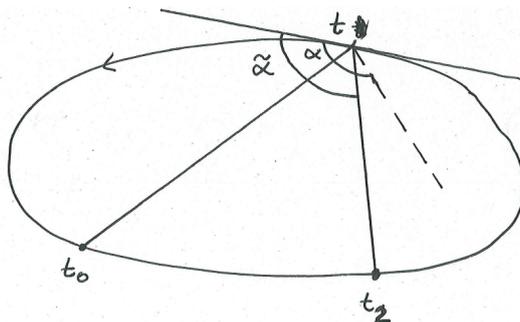
1.3 Der Abstand als erzeugende Funktion

Seien $t_0, t_2 \in \mathbb{S}^1$. Betrachte

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto A(t_0, t) + A(t, t_2).$$

Proposition 1.6. $t_1 \in \mathbb{S}^1$ ist ein kritischer Punkt dieser Abbildung gdw. eine Billiardtrajektorie $t_0 \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2$ existiert.

Beweis.



$$\frac{d}{dt}(A(t_0, t) + A(t, t_2)) = \cos \alpha - \cos \tilde{\alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\stackrel{\alpha, \tilde{\alpha} \in I}{\iff} \alpha = \tilde{\alpha} \iff \exists \text{Billiardtrajektorie } t_0 \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2.$$

□

Somit kann für einen Anfangs- und Endpunkt eine Zwischenstelle in der Billiardtrajektorie gefunden werden, indem die kritischen Punkte obiger Funktion gesucht werden. Analog kann man vorgehen, um n Zwischenstellen zu finden:

Proposition 1.7. Seien $t, \tilde{t} \in \mathbb{S}^1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \exists \text{Billiardtrajektorie } t \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow t_n \rightsquigarrow \tilde{t} \\ \iff & \nabla((t_1, \dots, t_n) \mapsto A(t, t_1) + A(t_1, t_2) + \dots + A(t_{n-1}, t_n) + A(t_n, \tilde{t})) = 0. \end{aligned}$$

□

2 Kaustiken und Erhaltungsgrößen am Beispiel: Billiards in einer Ellipse

2.1 Billiards in einer Ellipse

Eine Ellipse ist gegeben durch

$$E := \partial M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, P) + \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_-, P) = l \right\}.$$

Dabei gilt $a > b > 0$, sowie $l > \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, F_-)$, sowie $F_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ und $l = 2a$.

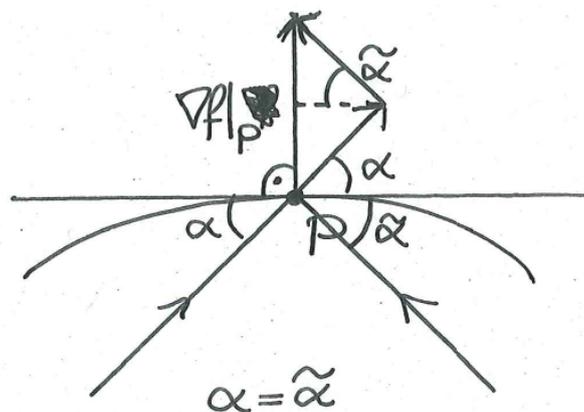
Proposition 2.1. *Betrachte einen Punkt P auf der Ellipse, sowie die stückweise geradlinige Trajektorie von F_- nach P , und anschließend von P nach F_+ . Dies stellt eine Billiardtrajektorie dar!*

Beweis. Es muss gezeigt werden, dass diese Trajektorie am Punkt P das Reflektionsgesetz erfüllt. Betrachte folgende Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, P) + \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_-, P).$$

Nach Definition der Ellipse gilt $E = f^{-1}(l)$, somit ist der äußere Normalenvektor von E gegeben durch ∇f . Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= \partial_2 \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, P) + \partial_2 \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_-, P) \\ &= \text{Einheitsvektor von } F_- \text{ nach } p + \text{Einheitsvektor von } F_+ \text{ nach } p. \end{aligned}$$



Aus der geometrischen Anschauung ergibt sich, dass die Trajektorie $F_- \rightsquigarrow P \rightsquigarrow F_+$ eine Billiardtrajektorie darstellt (insbesondere findet bei P eine Billiardreflektion statt). \square

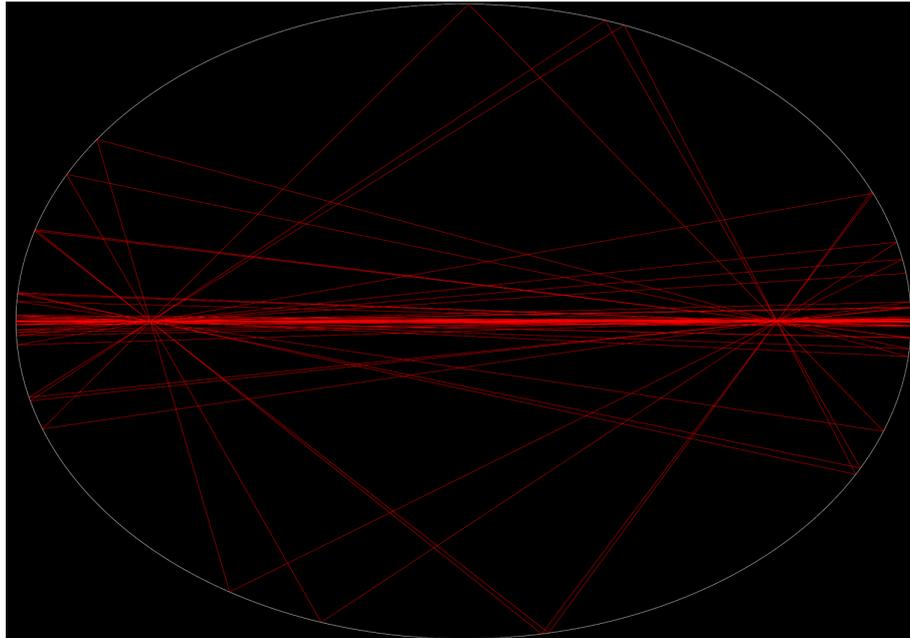
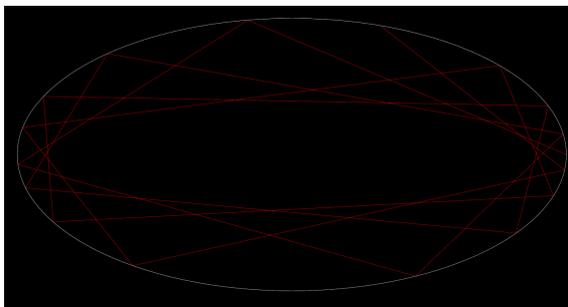


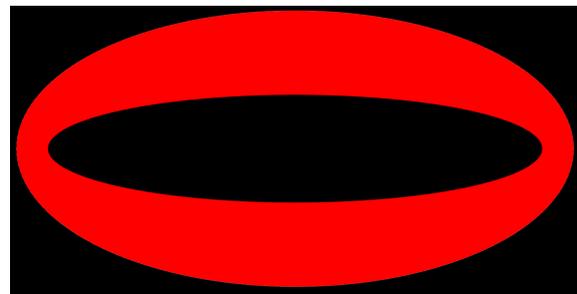
Abbildung 3: Billiardtrajektorie durch die Fokuspunkte einer Ellipse.

Die obige Proposition besagt, dass eine Billiardtrajektorie, die durch einen Fokus der Ellipse verläuft, ständig abwechselnd durch die beiden Fokuspunkte der Ellipse verläuft (vgl Abb. 3).

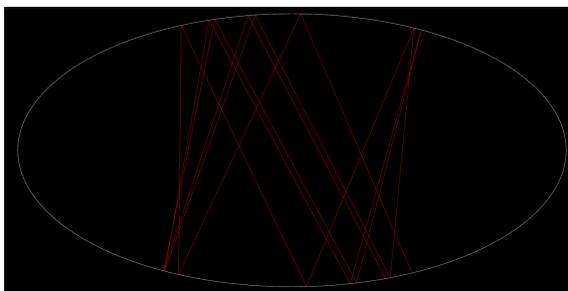
2.2 Definition einer Kaustik



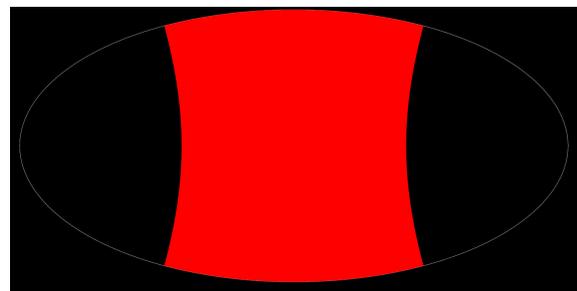
(a) Ellipse als Kaustik, wenige Reflektionen



(b) Ellipse als Kaustik, viele Reflektionen



(c) Hyperbel als Kaustik, wenige Reflektionen



(d) Hyperbel als Kaustik, viele Reflektionen

Abbildung 4: Billiardtrajektorien in einer Ellipse, die nicht durch die Fokuspunkte gehen.

Betrachtet man Billiardtrajektorien in der Ellipse, welche nicht durch die Fokuspunkte verlaufen, so sieht man interessante Effekte (vgl. Abb. 4). Diese Beobachtungen führen uns zum Begriff der Kaustik.

Definition 2.2. *Eine Kurve heißt Kaustik einer Billiardtrajektorie, falls jeder gerade Teilabschnitt der Billiardtrajektorie (bzw. die Verlängerung des jeweiligen Geradensegmentes) tangential an dieser Kurve liegt.*

Um die Kaustiken einer Ellipse zu verstehen, sei zunächst gesagt, was eine Hyperbel ist: Eine Hyperbel ist gegeben durch

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, P) - \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_-, P) = \pm l \}.$$

Dabei gilt $a, b > 0$ sowie $0 < l < \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(F_+, F_-)$, sowie $F_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ und $l = 2a$.

Definition 2.3. *Seien $a > b > 0$. Eine konfokale Familie ist eine Familie von 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\{C_{\lambda}\}$, gegeben durch*

$$C_{\lambda} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \right\}.$$

Dabei sei $\lambda \in (-a^2; -b^2)$ oder $\lambda \in (-b^2; \infty)$. Im ersten Fall ist C_{λ} eine Hyperbel, im zweiten Fall eine Ellipse. Alle Mitglieder der Familie besitzen dieselben Fokuspunkte

$$F_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

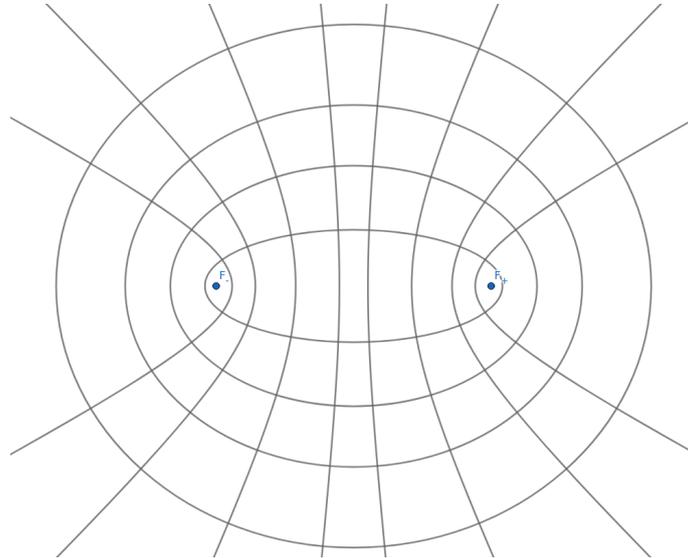
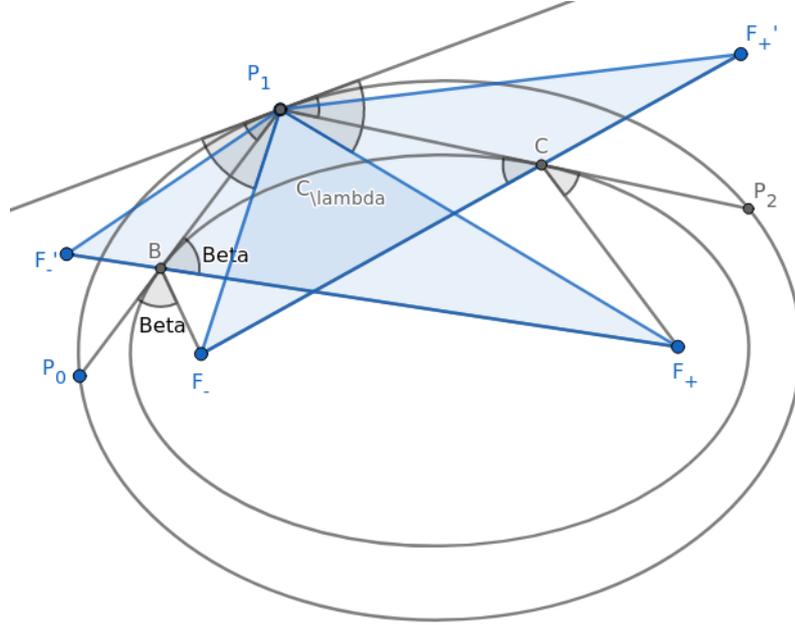


Abbildung 5: Eine konfokale Familie $\{C_{\lambda}\}$.

Nun lässt sich folgende Aussage zu den Kaustiken der (Billiardtrajektorien in einer) Ellipse formulieren:

Proposition 2.4. *Für eine Ellipse existiert für jede Billiardtrajektorie, die nicht durch die Fokuspunkte verläuft, eine Kaustik aus der konfokalen Familie.*

Beweis. Hier sei beispielhaft der Beweis für den Fall aufgeführt, dass sich als Kaustik eine Ellipse ergibt. Der andere Fall, bei der die Kaustik eine Hyperbel ist, funktioniert nach demselben Schema.



Sei $P_0 \rightsquigarrow P_1 \rightsquigarrow P_2$ eine Billiardtrajektorie in der Ellipse, für die gilt: $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{F_-F'_+}$ schneiden sich nicht. (Falls sie sich schneiden, ergibt sich als Kaustik eine Hyperbel.)
Konstruiere folgende Punkte:

1. F'_- : Reflektion von F_- an $\overline{P_0P_1}$.
2. F'_+ : Reflektion von F_+ an $\overline{P_1P_2}$.
3. B : Schnittpunkt von $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{F'_-F'_+}$.
4. C : Schnittpunkt von $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{F_-F'_+}$.

Wähle (eine Ellipse) C_{λ_1} aus der konfokalen Familie, für welches $\overline{P_0P_1}$ eine Tangente darstellt. Der Berührungspunkt ist tatsächlich der Punkt B : Aus der Konstruktion von F_- und B ist nämlich klar, dass die Winkel

$$\beta := \sphericalangle F_+BP_1 = \sphericalangle P_0BF_-$$

gleich sind. Daher findet in der Trajektorie $F_- \rightsquigarrow B \rightsquigarrow F_+$ eine Billiardreflektion bei B an $\overline{P_0P_1}$ statt. Wegen der zuletzt bewiesenen Proposition folgt, dass der Berührungspunkt von C_{λ_1} mit $\overline{P_0P_1}$ bei B liegt.

Analog lässt sich (eine Ellipse) C_{λ_2} aus der konfokalen Familie wählen, für welches $\overline{P_1P_2}$ eine Tangente darstellt, und hier ist C der Berührungspunkt.

Um nun $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2}$ zu zeigen, reicht es aus

$$|\overline{F_-B}| + |\overline{BF'_+}| = |\overline{F_-C}| + |\overline{CF'_+}|$$

zu zeigen. Wegen $|\overline{F_-B}| = |\overline{F'_-B}|$ und $|\overline{CF'_+}| = |\overline{CF'_+}|$ ist die Bedingung äquivalent zu

$$|\overline{F'_-F'_+}| = |\overline{F_-F'_+}|.$$

Um dieses zu zeigen, reicht es aus wenn wir uns überzeugen, dass die Dreiecke $\triangle F'_- F_+ P_1$ und $\triangle F_- F'_+ P_1$ kongruent zueinander sind. Unmittelbar klar sind die Identitäten

$$|\overline{F'_- P_1}| = |\overline{F_- P_1}| \quad \text{und} \quad |\overline{F_+ P_1}| = |\overline{F'_+ P_1}|.$$

Für die Kongruenz würde es daher reichen folgende Gleichheit von Winkeln zu zeigen:

$$\begin{aligned} \sphericalangle F_+ P_1 F_- + \sphericalangle F_- P_1 F'_- &= \sphericalangle F_+ P_1 F'_- \stackrel{!}{=} \sphericalangle F'_+ P_1 F_- = \sphericalangle F'_+ P_1 F_+ + \sphericalangle F_+ P_1 F_- \\ &\iff \sphericalangle F_- P_1 F'_- \stackrel{!}{=} \sphericalangle F'_+ P_1 F_+ \\ &\iff \sphericalangle F_- P_1 F'_- = 2 \cdot \sphericalangle F_- P_1 P_0 \stackrel{!}{=} 2 \cdot \sphericalangle P_2 P_1 F_+ = \sphericalangle F'_+ P_1 F_+. \end{aligned}$$

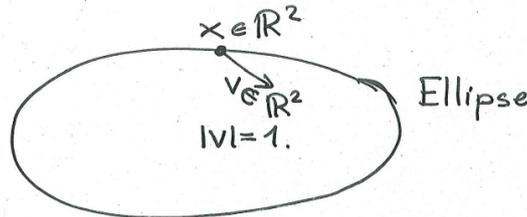
Letztere Gleichheit folgt aber aus der Tatsache, dass die beiden Billiardtrajektorien $F_- \rightsquigarrow P_1 \rightsquigarrow F_+$ sowie $P_0 \rightsquigarrow P_1 \rightsquigarrow P_2$ an der Tangente der Ellipse an P_1 das Reflektionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ erfüllen. \square

2.3 Erhaltungsgröße als Resultat der Kaustik

Die definierende Eigenschaft einer Kaustik, dass jeder Teilabschnitt der Billiardtrajektorie tangential an der Kaustik liegt, liefert für den Orbit der Billiardkugelabbildung im Phasenraum eine Erhaltungsgröße.

Diese Tatsache wird im Folgenden am Beispiel der Ellipse näher erläutert.

Wir betrachten für die diskrete Dynamik des Billiards nun anstatt der Koordinaten $(t\alpha)$ die Koordinaten im R^2 , nämlich $(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $x \in E$, $|v| = 1$ (wobei v nach innen zeigt).



Somit liegt die Gerade $x + \mathbb{R} \cdot v$ tangential an der Kaustik

$$C_\lambda = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} = 1 \right\}.$$

Hieraus ergibt sich, dass die Gleichung

$$\frac{(x_1 + tv_1)^2}{a^2 + \lambda} + \frac{(x_2 + tv_2)^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0,$$

eine quadratische Gleichung in t , eine doppelte Nullstelle besitzt. Dies ist äquivalent dazu, dass die zugehörige Diskriminante verschwindet. Betrachte die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} &\text{Die diskriminante der quadratischen Gleichung verschwindet} \\ \iff &\left(\frac{v_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{v_2^2}{b^2 + \lambda} \right) \left(\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} - 1 \right) = \left(\frac{x_1 v_1}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2 v_2}{b^2 + \lambda} \right)^2 \\ \iff &\frac{x_1^2 v_2^2 + x_2^2 v_1^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{v_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{v_2^2}{b^2 + \lambda} = 2 \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} = \frac{v_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{v_2^2}{b^2 + \lambda} \\
&\Leftrightarrow (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 = (b^2 + \lambda)v_1^2 + (a^2 + \lambda)v_2^2 \\
&\Leftrightarrow (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 = b^2 v_1^2 + a^2 v_2^2 + \lambda(v_1^2 + v_2^2) \\
&\Leftrightarrow \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 - b^2 v_1^2 - a^2 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda \\
&\Leftrightarrow \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 - b^2 v_1^2 - a^2 v_2^2 + a^2(v_1^2 + v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda + a^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + (a^2 - b^2)v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda + a^2 \\
&\stackrel{|v|=1}{\Leftrightarrow} \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}{a^2 - b^2} + v_1^2 = \frac{\lambda + a^2}{a^2 - b^2}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist eine Konstante (in Abhängigkeit vom Parameter λ der Kaustik), daher ist die linke Seite eine Erhaltungsgröße der Billiardtrajektorie. Da am Rand der Ellipse die Koordinaten (t, α) glatt von (x, v) abhängen, entspricht dies auch einer Erhaltungsgröße der Dynamik von T im Phasenraum.

2.4 Vollständige Integrabilität im Liouvillschen Sinn, diskrete Version des Arnold-Liouville-Theorems

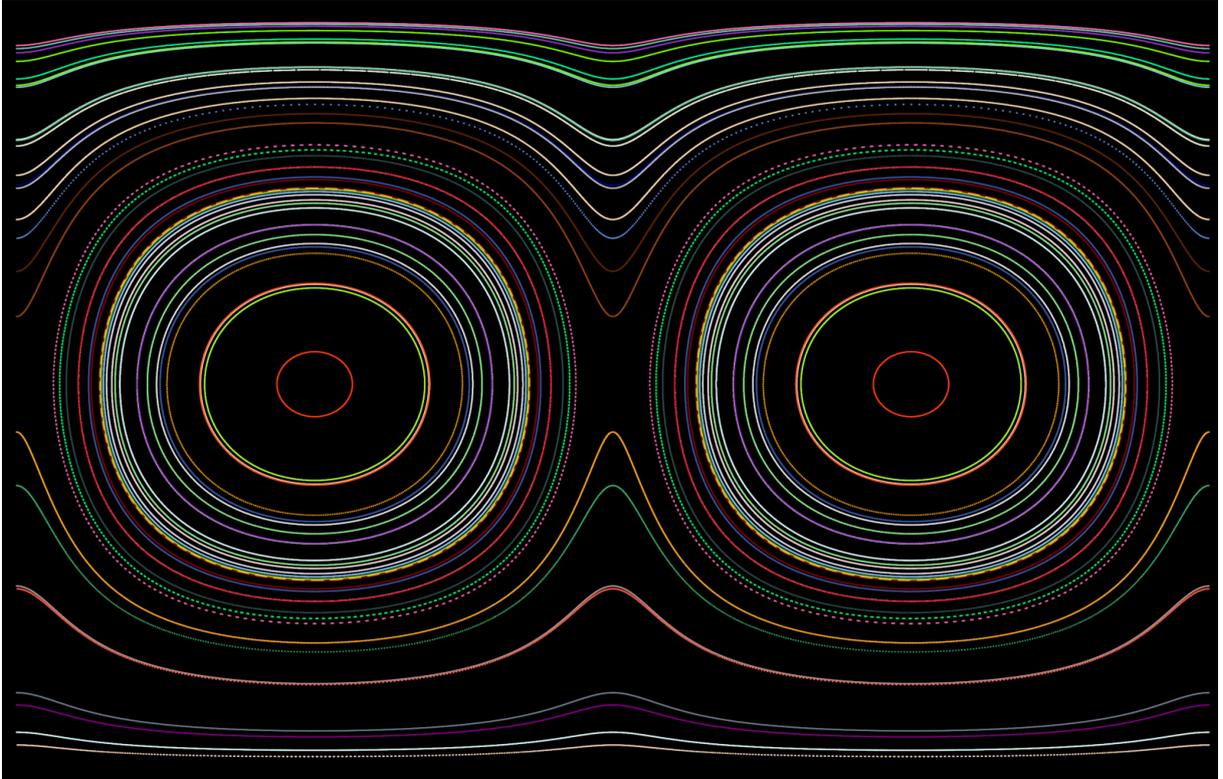


Abbildung 6: Trajektorien der Billiardkugelabbildung T in einer Ellipse, dargestellt im Phasenraum V . Jede Farbe stellt hier eine separate Trajektorie dar.

Wir betrachten nun einige allgemeine Aussagen zu integrablen Systemen, welche uns insbesondere auch Aussagen über die Dynamik der Billiardkugelabbildung innerhalb der Ellipse liefern (vgl. Abb 6).

Definition 2.5. Ein Symplektomorphismus $T : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ heißt vollständig integrabel oder integrabel im Liouvilleschen Sinn, falls es T -invariante glatte Funktionen $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ (Integrale von T) gibt, welche Poisson-kommutieren, d.h. $\{f_i, f_j\} = 0$ für alle i, j , und wenn fast überall gilt: $\nabla f_1, \dots, \nabla f_n$ sind linear unabhängig.

Da das Billiards in der Ellipse eine T -invariante Erhaltungsgröße besitzt, ist die Billiardkugelabbildung auf der Ellipse integrabel im Sinne dieser Definition.

Proposition 2.6. Die Niveaumengen der ersten Integrale

$$P_c = \{x | f_1(x) = c_1, \dots, f_n(x) = c_n\}, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

sind (fast überall) Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten von M .

Beweis. Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. an, dass $\nabla f_1, \dots, \nabla f_n$ überall linear unabhängig sind. Für $p \in P_c$ gilt: $T_p P_c = \ker D(f_1, \dots, f_n)(p)$, und $\dim(P_c) = n$, denn $D(f_1, \dots, f_n)(p)$ ist injektiv.

Außerdem: $0 = \omega_p(X_{f_i}(p), X_{f_j}(p)) = Df_i(p)(X_{f_j}(p))$, somit ist $X_{f_j}(p) \in T_p P_c$, für alle $j = 1, \dots, n$. Ferner sind X_{f_1}, \dots, X_{f_n} linear unabhängig, denn aus

$$\mu_1 X_{f_1}(p) + \dots + \mu_n X_{f_n}(p) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_p(\mu_1 X_{f_1}(p) + \dots + \mu_n X_{f_n}(p), \cdot) = \mu_1 Df_1(p) + \dots + \mu_n Df_n(p) \\ &= \langle \mu_1 \nabla f_1 + \dots + \mu_n \nabla f_n, \cdot \rangle. \end{aligned}$$

Da die Gradienten ∇f_i linear unabhängig sind, folgt $\mu_i = 0$.

Somit ist $T_p P_c = \text{span}(X_{f_1}, \dots, X_{f_n})$, und es folgt daher $\omega|_{T_p P_c} = 0$, d.h. P_c ist eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit. \square

Für ein integrables System, wie es das Billiards ist, lässt sich folgendes Theorem formulieren:

Theorem 1 (Diskrete Version des Arnold-Liouville-Theorems).

Sei T ein vollständig integrabler Symplektomorphismus. Dann gilt für (fast alle) Niveaumengen P_c (Genauer: für alle Niveaumengen, auf denen die Gradienten der Integrale von T überall verschwinden): P_c ist diffeomorph zu einem n -Torus, und man kann Koordinaten in einer Umgebung der Niveaumenge so wählen, dass T auf P_c die Translation $(x, y) \mapsto (x + a, y)$ beschreibt. \square

2.5 „Fadenkonstruktion“

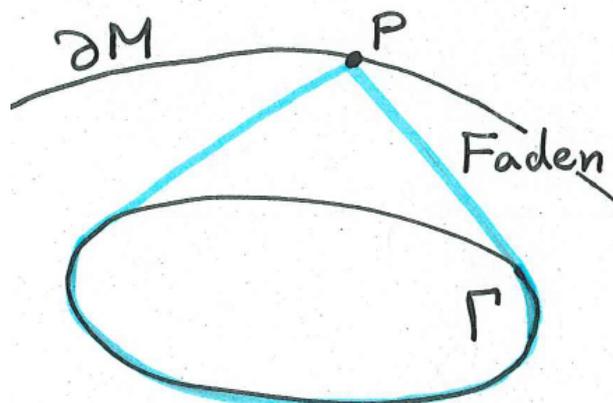
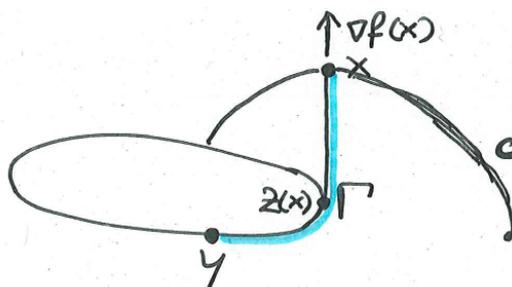


Abbildung 7: Fadenkonstruktion: Rekonstruktion von ∂M aus der Kaustik Γ .

In der sogenannten „Fadenkonstruktion“ geht es um die Fragestellung, wie aus einer gegebenen Kaustik Γ , welche eine geschlossene Kurve sei, die Billiardkurve ∂M rekonstruiert werden kann. Man kann hierzu wie folgt vorgehen: Man stelle sich einen Faden der Länge l vor, der zu einer (nicht verknoteten) Schleife zusammengebunden ist. Dabei sei $l >$ Länge von Γ . Nun lege man den Faden entlang der Kurve Γ an. (Man stellt sich vor, dass sich der Faden an Γ aufhängen lässt, d.h. der Faden kann nicht in den von Γ eingeschlossenen Bereich hinein.) Nun spanne den Faden, sodass er an zwei Stellen tangential sich von Γ weg hebt, und diese tangentialen Strahlen sich an einem Punkt p treffen. (Der Punkt p ist dort, wo man den Faden festhält und von Γ wegzieht, um ihn zu spannen.) Die Menge aller solchen Punkte p ist dann genau die Billiardkurve ∂M , die Γ als eine Kaustik besitzt.

Proposition 2.7. *Die Fadenkonstruktion funktioniert!*

Beweis. Schritt 1:



Fixiere einen Punkt y auf Γ , und sei x ein Punkt außerhalb der von Γ umschlossenen Fläche. Betrachte nun ein Fadenstück, was an y befestigt ist, gegen den Uhrzeigersinn um Γ sich wickelt, und sich dann von Γ weg hebt, um geradlinig auf x zuzugehen. (Das andere Ende des Fadens ist an x befestigt.) Eine Funktion f beschreibe die Länge dieses Fadens:

$$f : x \mapsto \text{Länge des Fadenstücks von } y \text{ nach } x.$$

Sei $z = z(x)$ der Punkt, an dem sich das Fadenstück von Γ weg hebt. Es gilt dann:

$$f(x) = |\widehat{yz}| + |\overline{xz}|.$$

Dabei bezeichnet $|\widehat{yz}|$ das Teilstück der Kurve Γ von y bis z .

Fixiere nun den Wert von f , d.h. zeichne mit dem Fadenstück einer festen Länge l eine Kurve $c = \{x | f(x) = l\}$. Nach Konstruktion steht ∇f senkrecht auf c . Außerdem gilt für einen Punkt x auf c , dass $\nabla f(x)$ Länge 1 hat und in Richtung von $z(x)$ nach x zeigt, denn in dieser Richtung würde die Länge des Fadenstücks zunehmen.

Schritt 2:

Betrachte nun, analog zur letzten Konstruktion, eine Funktion g , welche die Länge eines Fadenstücks von y nach x beschreibt, diesmal sei das Fadenstück *im Uhrzeigersinn* um Γ gewickelt. Sei $\tilde{z} = \tilde{z}(x)$ der Punkt, an dem sich dieses Fadenstück von Γ weghebt. Die Länge des Fadens nach der Fadenkonstruktion ist dann genau durch

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

gegeben. Somit gilt: Die Kurve ∂M , welche durch die Fadenkonstruktion gezeichnet wird, entspricht einer Niveaumenge $\{x | h(x) = l\}$. Die äußere Normale von ∂M am Punkt x ist dann genau durch

$$\begin{aligned} \nabla h(x) &= \nabla f(x) + \nabla g(x) \\ &= \text{Einheitsvektor von } z \text{ nach } x + \text{Einheitsvektor von } \tilde{z} \text{ nach } x. \end{aligned}$$

gegeben. Analog zum Beweis der Proposition, dass in der Ellipse jede Trajektorie durch beide Fokuspunkte eine Billiardtrajektorie ist, ergibt sich hier aus der geometrischen Anschauung, dass die Trajektorie $z \rightsquigarrow x \rightsquigarrow \tilde{z}$ eine Billiardtrajektorie darstellt (insbesondere findet bei x eine Billiardreflektion statt). \square

2.6 Lazukin's Theorem

Das folgende Theorem macht eine Aussage über die Existenz von Kaustiken:

Theorem 2 (Lazukin).

Ist die Billiardkurve ∂M glatt, und mit nicht-verschwindender Krümmung, so gibt es in einer Umgebung der Billiardkurve eine Familie glatter Kaustiken, dessen Vereinigung positives Maß besitzt. \square

Man führe sich nochmals vor Augen, dass (wie in den bisherigen Ausführungen beschrieben) die Existenz einer Kaustik bedeutet, dass sich ein unter T invarianter Kreis \mathbb{S}^1 im Phasenraum finden lässt. Aus Lazukins Theorem folgt daher, dass (unter den gegebenen Voraussetzungen) ein Bereich des Phasenraumes zu finden ist, der sich in invariante \mathbb{S}^1 blättern lässt.

Literatur

- [1] TABACHNIKOV, SERGE: *Billiards*. 1995. Online erhältlich unter <https://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsbook.pdf>.
- [2] TABACHNIKOV, SERGE: *Geometry and Billiards*. American Mathematical Society, 2005. Online erhältlich unter <https://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf>.