Blatt 8

Aufgabe 1

(M, g, O_M) orientierte PR-Mfkt. der Dim. m, $\lambda: M \to (0,\infty)$ Funktion

Zz: $vol_{\lambda^2 g} = \lambda^m \cdot vol_g$

Beweis: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine orient. orthon. Basis von TU, $U \subseteq M$ offen bzgl. g.

Dann ist $\{\frac{1}{\lambda} e_1, \dots, \frac{1}{\lambda} e_n\}$ eine orient. orthon. Basis von TU bzgl. $\lambda^2 g$

$$\lambda^2 g(\tfrac{1}{\lambda} e_i, \tfrac{1}{\lambda} e_j) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Der Raum der m-Formen ist 1-dimensional, d.h. es gibt eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ mit

$$f \cdot vol_g = vol_{\lambda^2 g}$$

Es gilt

$$f = f \cdot vol_g(e_1, \dots, e_m) = vol_{\lambda^2 g}(e_1, \dots, e_m) = \lambda^m \cdot vol_{\lambda^2 g}(\tfrac{1}{\lambda} e_1, \dots, \tfrac{1}{\lambda} e_m)$$
$$= \lambda^m.$$

$\mu_R: S^n \to S^n_R$, $\mu(x) = R \cdot x$

Zz: $\mu_R^* vol_{g_{S^n_R}} = R^n vol_{g_{S^n}}$.

Beweis: Es gilt: $\mu_R^* g_{S^n_R} = \mu_R^* \iota_R^* g^{n+1}_{eukl} = (\iota_R \circ \mu_R)^* g^{n+1}_{eukl}$

$= (\mu_R \circ \iota_1)^* g^{n+1}_{eukl} = \iota_1^* \mu_R^* g^{n+1}_{eukl} = R^2 g_{S^n}$

$$\Rightarrow \quad \mu_R^* vol_{g_{S^n_R}} = vol_{\mu_R^* g_{S^n_R}} = vol_{R^2 g_{S^n}} = R^n vol_{g_{S^n}}$$

Alternativ (ohne $*$): $\mu_R^* vol_{g_{S^n_R}} = f \cdot vol_{S^n}$, $e_1, \dots, e_n$ orthon. Basis von $T_p S^n$.

$$\Rightarrow f = vol_{g_{S^n_R}}(T\mu_R e_1, \dots, T\mu_R e_n) = R^n \cdot vol_{g_{S^n_R}}(e_1, \dots, e_n) = R^n.$$

Betrachte $(M \times N, g^M + \lambda^2 g^N)$.

Formel für die Volumenform: $vol_{g^M + \lambda^2 g^N} = vol_{g^M} \wedge vol_{\lambda^2 g^N} = \lambda^n vol_{g^M} \wedge vol_{g^N}$.

Für $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_{eukl}) = (\mathbb{R} \times S^{n-1}, g_{eukl} + r^2 g_{S^{n-1}})$

$$vol_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = r^{n-1} \cdot vol_{g^1_{eukl}} \wedge vol_{g_{S^{n-1}_1}}.$$

Aufgabe 2

$Y \in \mathfrak{X}(S^n)$ nullstellenfreies Vektorfeld, normiert

$\varepsilon > 0$ (klein, wir werden es später wählen / von oben beschränken)

$R := \sqrt{1+\varepsilon^2}$

(a) $F: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = x + \varepsilon \cdot Y(x)$

Z.z. • $F(S^n) \subseteq S^n_R$

• Bonus: $F: S^n \to S^n_R$ ist orientierungserhaltender Diffeo.

Beweis: $\langle F(x), F(x) \rangle = \langle x + \varepsilon Y(x), x + \varepsilon Y(x) \rangle$

$= \langle x, x \rangle + 2\varepsilon \langle x, Y(x) \rangle + \varepsilon^2 \langle Y(x), Y(x) \rangle$

$= 1 + 0 + \varepsilon^2 = R^2$

$\rightarrow F(S^n) \subseteq S^n_R$.

Bonus: Sei Y' eine Fortsetzung von Y auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ def. durch

$Y_{(1,x)} = T\pi_{S^n}^{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} Y'$ und $Y'_{(r,x)} \in TS^n_r$.

Weiter sei $\rho: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine radiale Funktion mit $\rho \equiv 1$ in einer Umg. von S^n und $\rho \equiv 0$ in einer Umg. von 0 und für große Radien.

Dann ist $\rho \cdot Y' =: \tilde{Y}$ eine Fortsetzung von Y auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Und $\tilde{F}(x) = x + \varepsilon \cdot \tilde{Y}(x)$ eine Fortsetzung von F auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Es gilt $d\tilde{F} = id + \varepsilon d\tilde{Y}$. Da $\tilde{Y} \neq 0$ nur auf einer kompakten Menge ist $d\tilde{Y}$ beschränkt. Es gibt also ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass $\det(d\tilde{F}) > 0$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Damit ist $\tilde{F}$ ein lokaler Diffeo. für alle Punkte $x \in S^n$, d.h. für alle $x \in S^n$ gibt es eine Umg U_x von x in $\mathbb{R}^{n+1}$ s.d. $\tilde{F}|_{U_x}$ ein Diffeo auf sein Bild ist. Damit ist das Bild von S^n offen in S^n_R. Aber S^n ist kompakt, also ist das Bild abgeschlossen in S^n_R

Zusammenhängend $\Rightarrow F(S^n) = S^n_R$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ injektiv ist.

Da $\tilde{Y}$ stetig ist gibt es ein $C>0$ s.d. $|Y(x)-Y(y)| \leq C\cdot|x-y|$

Es folgt

$$|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| = |(x-y) + \varepsilon\cdot(Y(x)-Y(y))|$$
$$\geq |x-y| - \varepsilon\cdot|Y(x)-Y(y)|$$
$$\geq (1-\varepsilon\cdot C)\cdot|x-y|$$

$\Rightarrow$ Für ε klein genug ist $\mathcal{F}$ injektiv.

(b) Z.z.: $R\cdot\int_{S^n_R} \mathrm{vol}_{g_{S^n_R}}$ ist ein Polynom in ε.

<u>Beweis:</u>

Nach Aufgabe 8-4 gilt

$$\mathrm{vol}_{S^n_R} = \iota_R^*\left(1/R\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i\, d\hat{x}^i\right)$$
$$\mathrm{vol}_{S^n} = \iota_1^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i\, d\hat{x}^i\right)$$

Damit ergibt sich

$$R\cdot\int_{S^n_R}\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = R\cdot\int_{S^n_R}\iota_R^*\left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i\, d\hat{x}^i\right)$$
$$= R\cdot\int_{S^n_1}\mathcal{F}^*\left(\iota_R^*\left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i\, d\hat{x}^i\right)\right)$$
$$= \int_{S^n_1}\iota_1^*\left(\mathcal{F}^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i\, d\hat{x}^i\right)\right)$$
$$= \int_{S^n_1}\iota_1^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i(x^i+\varepsilon\cdot Y^i(x))\, d\,\widehat{x^i+\varepsilon Y^i(x)}\right)$$
$$= P(\varepsilon).$$

(c) Z.z.: $R\int_{S^n_R}\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = c_n\cdot\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)^{n+1}$, $c_n := \int_{S^n}\mathrm{vol}_{g_{S^n}}$

<u>Beweis:</u>

$$R\int_{S^n_R}\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = R\cdot\int_{S^n_R}\mu_R^{-1\,*}\mu_R^*\,\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}}$$
$$= R\cdot\int_{S^n_1}R^n\cdot\mathrm{vol}_{g_{S^n_1}} = R^{n+1}c_n = c_n\cdot\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)^{n+1}.$$

(d)

Sei $n=2m$, dann gilt $P(\varepsilon) = c_n\cdot\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)^{2m+1} = c_n\,(1+\varepsilon^2)^m\cdot\sqrt{1+\varepsilon^2}$

Da $\sqrt{1+\varepsilon^2}$ kein Polynom in ε ist erhalten wir einen Widerspruch.

Aufgabe 3

M^m orientierbar, $X \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfeld

(a) $\omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M)$ Volumenform

zz: Der Fluss von X erhält die Volumenform ω

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{div}_\omega X = 0$

Beweis: Der Fluss von X erhält ω

$\Leftrightarrow \quad (\Phi_X^t)^* \omega = \omega$

$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_X \omega = 0$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{div}_\omega X = 0$

zz: $(\mathrm{div}_\omega X)\,\omega = d(\iota_X \omega)$

Beweis: $(\mathrm{div}_\omega X)\omega = \mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega$

$= d\iota_X \omega$, da $d\omega$ eine $(m+1)$-Form auf M^m.

Schreibe $\mathrm{div}_\omega X$ in lokalen Koordinaten $(x_1, \dots, x_m)$

$$X = \sum_i X_i \partial_{x^i}, \qquad \omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\omega X \cdot \omega &= d\iota_X \omega = d\Big(\sum_i X_i \cdot f\, \iota_{\partial_{x^i}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m\Big) \\
&= d\Big(\sum_i X_i f (-1)^i \widehat{dx^i}\Big) \\
&= \sum_i \frac{\partial(X_i f)}{\partial x^j} \cdot (-1)^i dx^j \wedge \widehat{dx^i} \\
&= \frac{f}{f}\Big(\sum_i \frac{\partial(X_i f)}{\partial x^j}(-1)^i \delta_{ij} (-1)^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m\Big) \\
&= \frac{1}{f}\Big(\sum_i \frac{\partial(X_i \cdot f)}{\partial x^i}\Big)\,\omega
\end{aligned}$$

$$\to \quad \mathrm{div}_\omega X = \frac{1}{f} \sum_i \frac{\partial(f \cdot X_i)}{\partial x^i}$$

Insb.: für $f \equiv 1$ erhalten wir die Divergenz aus Analysis II.

b) g Riem. Metrik, ∇ Levi-Civita Ableitung

$\nabla X \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$, d.h. $\nabla X : TM \to TM$

· $\mathrm{Spur}(\nabla X) : M \to \mathbb{R}$

Zz: $\mathrm{Spur}(\nabla X) = \mathrm{div}_{vol_g} X$

Beweis: In den im Hinweis beschriebenen Koord. gilt:

$$\nabla_{\partial_{x^j}} X = \partial X_i/\partial x^j \, \partial_{x^i} + X_i \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} \underset{\text{in } p}{\overset{\uparrow}{=}} \partial X_i/\partial x^j \, \partial_{x^i}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}\, \nabla X = \sum_i \partial X_i/\partial x^i$$

In diesen Koordinaten gilt $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$

Mit der Formel aus (a) für $f = 1$ sehen wir die Behauptung.