Aufgabe 7-1

$\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & r^{-2} \\ r^{-2} & 0 \end{pmatrix}$, $r^2 = x^2 + y^2$

$X = a\,\partial_x$ lichtart. Vf. , $a : \tilde{M} \to (0,\infty)$.

(a) zz: $\nabla_X X = 0 \iff a = b(y) r^2$ für $b : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

Beweis: Mit den Eigenschaften des Zusammenhangs:

$$\nabla_X X = a \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x} \partial_x + a\, \nabla_{\partial_x} \partial_x \right)$$

Wir müssen $\nabla_{\partial_x}\partial_x$ berechnen. Mit der Koszul-Formel

$$2\tilde{g}(\nabla_{\partial_x}\partial_x, Y) = (\mathcal{L}_{\partial_x}\tilde{g})(\partial_x, Y) + d(\flat\partial_x)(\partial_x, Y)$$
$$= \ldots = \frac{-4x}{(x^2+y^2)^2}\, dy(Y)$$

Für $\tilde{g}$ wie oben erhalten wir

$Y = \partial_x$: $2r^{-2} dy(\nabla_{\partial_x}\partial_x) = 0$

$Y = \partial_y$: $2r^{-2} dx(\nabla_{\partial_x}\partial_x) = -4x r^{-4}$

$\Rightarrow \nabla_{\partial_x}\partial_x = -2x \cdot r^{-2}\, \partial_x$

Damit:

$$\nabla_X X = a \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x} \partial_x - 2x \cdot r^{-2} \cdot a\, \partial_x \right)$$

Also: $0 = \nabla_X X$

$\iff \frac{\partial a}{\partial x} = 2xr^{-2} a$

$\iff \frac{\partial}{\partial x} \log a = 2xr^{-2} = \frac{\partial}{\partial x} \log(r^2)$

$\iff \frac{\partial}{\partial x}(\log a - \log r^2) = 0$

$\iff \log a - \log r^2 = \hat{b}(y)$

$\iff a/r^2 = e^{\hat{b}(y)}$

$\iff a = b(y) \cdot r^2$.

(b) $b \equiv 1$

zz: • Der Fluss von X ist nicht vollständig.

• Der geodätische Fluss von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ist nicht vollständig.

<u>Beweis:</u> Für $b=1$ und $a=r^2$ ist $X=r^2\partial_x$ ein geodätisches Vektorfeld.

Die Integralkurve von X durch $(x_0,0)$ ist def. durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} \Phi_X^t = X(\Phi_X^{t_0}) = \begin{pmatrix} (\Phi_X(t_0))_x^2 + (\Phi_X(t_0))_y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial/\partial t\, (\Phi_X^t)_y = 0 \Rightarrow (\Phi_X^t)_y = y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \partial/\partial t\, (\Phi_X^t)_x = (\Phi_X^{t_0})_x^2$$

$$\Rightarrow \Phi_X(t) = \frac{1}{c_0 - t}$$

$$x_0 = (\Phi_X(0))_x = \frac{1}{c_0} \Longrightarrow \Phi_X(t) = \begin{pmatrix} x_0/(1-x_0 t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Integralkurve existiert nur auf $(-\infty, 1/x_0)$ für $x_0>0$

$(1/x_0, \infty)$ für $x_0<0$.

Nach (a) ist Φ_X^t die Geodätische von $r^2\partial_x$ durch $(x_0, 0)$.

Also ist der geodätische Fluss von $(\tilde{M},\tilde{g})$ nicht vollständig.

(c) <u>z.z.</u> $\mu_\lambda : \tilde{M} \to \tilde{M}$, $(x,y)\mapsto(\lambda x,\lambda y)$ ist eine Isometrie von $(\tilde{M},\tilde{g})$

<u>Beweis:</u> $d\mu_\lambda = \lambda\cdot \mathbb{1}$.

$$(\mu_\lambda^* g)_{(x,y)} = g_{(\lambda x,\lambda y)}(d\mu_\lambda \cdot, d\mu_\lambda \cdot) = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & ((\lambda x)^2+(\lambda y)^2)^{-1} \\ ((\lambda x)^2+(\lambda y)^2)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= g_{(x,y)}.$$

(d) $\pi : \tilde{M} \to \tilde{M}/G =: M$ Quotientenabb.

$G = \langle \mu_\lambda \rangle \subseteq \mathrm{Iso}(M,g)$ Untergruppe

<u>z.z.</u>
- M ist diffeom. zu einem Torus
- Es ex. Metrik g auf M s.d. π PR Überlagerung
- (M,g) ist kompakte PR-Mfkt mit unvollst. geod. Fluss.

<u>Beweis:</u> Punkte in M sind Äquivalenzklassen $[(r,\varphi)]$, $r\in\mathbb{R}^+, \varphi\in S^1$

mit $(r,\varphi)\sim(r',\varphi') \iff \varphi=\varphi'$ und es ex $\lambda\in\mathbb{Z}$: $r=\lambda^2\cdot r'$.

Wir def. eine Abbildung durch

$$\tilde{M}/G \longrightarrow S^1_{\log(\lambda)} \times S^1 \qquad \text{wobei } S^1_{\log\lambda} = \mathbb{R}/\log\lambda\cdot\mathbb{Z}.$$

$$[(r,\varphi)] \longmapsto ([\log(r)], [\varphi])$$

Diese Abb. ist wohldefiniert und bijektiv.

Mit Satz 3.66 sehen wir: $(\tilde{M}, \tilde{g})$ PR Mfkt, $G \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ glatte, freie, eigentliche Linkswirkung einer Lie-Gruppe durch Isometrien von $\tilde{M}$.

$\Rightarrow$ $\pi: \tilde{M} \to \tilde{M}/G \cong \mathbb{T}^2$ ist glatte Submersion

$\pi^{-1}(p) = \pi^{-1}(r, \varphi) = \{(\lambda^{2k} r, \varphi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist Untermfkt.

$\Rightarrow$ existiert PR-Metrik $g_{\tilde{M}/G} =: g$ auf $\tilde{M}/G$ s.d. $\pi: (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (\tilde{M}/G, g)$ eine PR-Submersion ist. $\triangleleft$

G diskret $\Rightarrow$ PR-Überlagerung.

Damit

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[r, "\pi\ \text{PR Subm.}"] \arrow[dr, dashed] & \tilde{M}/G = M \arrow[d] \\
& S^1_{\log\lambda} \times S^1
\end{tikzcd}$$

Die induzierte Abb. von $\tilde{M} \to S^1_{\log\lambda} \times S^1$ ist diff'bar also auch $M \to S^1_{\log\lambda} \times S^1$ nach Def. der diff'baren Struktur auf dem Quotienten. Umgekehrt sieht man leicht, dass auch die Abb $S^1_{\log\lambda} \times S^1 \to \tilde{M}/G$ diff'bar ist.

Da π eine PR-Überlagerung ist lässt sich der geod. Fluss von (M, g) durch den von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bestimmen. Insb. am Punkt $[(x_0, 0)]$ ex. die Geod. i Richtung ~~∂_x~~ $T\pi(r^2 \partial_x)$ nur für endliche Zeit (in eine Richtung).

<u>Bem.</u>: Das Vektorfeld $r^2 \partial_x$ steigt nicht global zu einem Vf. auf M ab, da $(d\mu_\lambda)(X) = \lambda^{\pm 1} X$.

Aufgabe 7-2

$\mathcal{F}: (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ PR-Submersion

$U \subseteq M$ offen, $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}^{-1}(U))$ vertikal

zz! $[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - [X,Y]^{\mathcal{H}}$ und $[X^{\mathcal{H}}, Z]$ sind vertikal

Beweis! $d\mathcal{F}([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - [X,Y]^{\mathcal{H}}) = [d\mathcal{F} X^{\mathcal{H}}, d\mathcal{F} Y^{\mathcal{H}}] - [X,Y]$

$$= [X,Y] - [X,Y] = 0$$

$$d\mathcal{F}([X^{\mathcal{H}}, Z]) = [d\mathcal{F} X^{\mathcal{H}}, d\mathcal{F} Z] = [d\mathcal{F} X^{\mathcal{H}}, 0] = 0.$$

zz! $\nabla^{\tilde{g}}_{X^{\mathcal{H}}}(Y^{\mathcal{H}}) = (\nabla^{g}_{X} Y)^{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}$.

Beweis: Es gilt:

$$2\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_{X^H} Y^H, Z) = \mathcal{L}_{X^H}(\tilde{g}(Y^H, Z)) + \mathcal{L}_{Y^H}(\tilde{g}(X^H, Z)) - \mathcal{L}_Z(\tilde{g}(X^H, Y^H))$$
$$+ \tilde{g}([X^H, Y^H], Z) - \tilde{g}([Y^H, Z], X^H) - \tilde{g}([X^H, Z], Y^H)$$

Für Z vertikal gilt $\tilde{g}(X^H, Z) = 0$ und

$$[X^H, Z] = [X^H, Z]^{\mathcal{V}}$$

Damit bleibt

$$2\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_{X^H} Y^H, Z) = -\mathcal{L}_Z(\tilde{g}(X^H, Y^H)) + \tilde{g}([X^H, Y^H], Z)$$

Beh: $\mathcal{L}_Z(\tilde{g}(X^H, Y^H)) = 0$ (für Z vertikal)

Sei ϕ_Z^t der Fluss von Z. Dann gilt: $\mathcal{F}(\phi_Z^t(p_0)) = \mathcal{F}(p_0)$

und $\tilde{g}_{p_0}(X^H, Y^H) = g_{\mathcal{F}(p_0)}(d\mathcal{F} X^H, d\mathcal{F} Y^H) = g_{\mathcal{F}(p_0)}(X, Y)$

$= g_{\mathcal{F}(\phi_Z^t(p_0))}(X, Y) = \tilde{g}_{\phi_Z^t(p_0)}(X^H, Y^H)$

$\to$ $\tilde{g}(X^H, Y^H)$ konst. entlang von Integralkurven von Z $\to$ Beh. #

Also $2\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_{X^H} Y^H, Z) = \tilde{g}([X^H, Y^H], Z) = \tilde{g}([X^H, Y^H]^{\mathcal{V}} - [X,Y]^H, Z)$

$$= \tilde{g}([X^H, Y^H]^{\mathcal{V}}, Z)$$

$$\Rightarrow (\nabla^{\tilde{g}}_{X^H} Y^H)^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}[X^H, Y^H]^{\mathcal{V}}$$

Für Z horizontal gilt: $\tilde{g}([X^H, Y^H], Z) = g([X,Y], d\mathcal{F} Z)$

$\mathcal{L}_{X^H}(\tilde{g}(Y^H, Z)) = \mathcal{L}_X(g(Y, d\mathcal{F} Z))$; $\mathcal{L}_Z(\tilde{g}(X^H, Y^H)) = \mathcal{L}_{d\mathcal{F} Z}(g(X, Y))$.

Damit $2\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_{X^H} Y^H, Z) = \ldots = \mathcal{L}_X(g(Y, d\mathcal{F} Z)) + \mathcal{L}_Y(g(X, d\mathcal{F} Z)) - \mathcal{L}_{d\mathcal{F} Z}(g(X, Y))$

$$+ g([X,Y], d\mathcal{F} Z) - g([Y, d\mathcal{F} Z], X) - g([X, d\mathcal{F} Z], Y)$$

$$= 2\, g(\nabla^{g}_{X} Y, d\mathcal{F} Z) = 2\tilde{g}((\nabla^{g}_{X} Y)^{\mathcal{H}}, Z).$$

Damit ergibt sich: $\nabla^{\tilde g}_{X^H} Y^H = (\nabla^g_X Y)^H + \frac{1}{2}[X^H, Y^H]^\mathcal{V}$ $\square$

$\tilde p \in \tilde M$, $\tilde v \in \mathcal{H}_{\tilde p}$, $p := \mathcal{F}(\tilde p)$, $v := d_{\tilde p}\mathcal{F}\tilde v$

$\gamma_{\tilde v} : I_{\tilde v} \to \tilde M$ Geodätische von $(\tilde M, \tilde g)$

Zz: • $\gamma_{\tilde v}$ ist horizontal, d.h. $\dot\gamma_{\tilde v}(t) \in \mathcal{H}_{\gamma_{\tilde v}(t)}$ $t \in I_{\tilde v}$

• $\mathcal{F} \circ \gamma_{\tilde v}$ ist Geodätische für (M, g) mit Anfangsvektor v.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die Geodätische γ_v und setzen das Vektorfeld $\dot\gamma_v$ zu einem Vektorfeld X auf einer Umgebung U von p fort. X erfüllt also $\dot\gamma_v = X \circ \gamma_v$

Es sei X^H die horizontale Anhebung von X. Dann gilt

$$\nabla^{\tilde g}_{X^H} X^H = (\nabla^g_X X)^H + \frac{1}{2}[X^H, X^H]^\mathcal{V} = (\nabla^g_X X)^H$$

Sei $\tilde\gamma_v$ die Integralkurve von X^H mit $\tilde\gamma_v(0) = \tilde p$. Dann gilt $\mathcal{F} \circ \tilde\gamma_v = \gamma_v$

$$\tilde\gamma_v \nabla^{\tilde g}_{\partial_t} \dot{\tilde\gamma}_v = (\nabla_{X^H} X^H)_{\tilde\gamma_v(t)} = (\nabla_X X)^H_{\tilde\gamma_v(t)} = ((\nabla_X X)_{\gamma_v(t)})^H_{\tilde\gamma_v(t)}$$

$$= (\dot\gamma_v \nabla_{\partial_t}(X \circ \gamma_v))^H_{\tilde\gamma_v(t)} = (\dot\gamma_v \nabla_{\partial_t} \dot\gamma_v) = 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde\gamma_v$ ist Geodätische mit $\dot{\tilde\gamma}_v(0) = X(\gamma_v(0))^H = v^H = \tilde v$

$\tilde\gamma_v(0) = \tilde p$

$\Rightarrow$ $\tilde\gamma_v = \gamma_{\tilde v}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \circ \gamma_{\tilde v} = \mathcal{F} \circ \tilde\gamma_v = \gamma_v$ ist Geodätisch mit Anfangsv. v. (wo sinnvoll)

X^H horizontal und tang. an $\gamma_{\tilde v}$ $\Rightarrow$ $\gamma_{\tilde v}$ horizontale Kurve.

<u>B. zz:</u> $A := \{ t \in I_{\tilde v} \mid \gamma_{\tilde v}|_{[0,t)}$ erfüllt (a) und (b)$\}$ stimmt mit $I_{\tilde v}$ überein.

<u>Problem:</u> Es kann sein, dass sich das Vektorfeld X nicht auf eine größere Umgebung fortsetzen lässt.

Sei $t \in I_{\tilde v}$. Dann lässt sich das obige Argument für alle $s \in [0, t]$ wiederholen. Damit erhalten wir eine offene Überdeckung von $[0, t_0]$ ~~auf de~~ so dass (a) & (b) auf jedem Element der Überdeckung gelten.

Eind. von Geod. $\Rightarrow$ (a) & (b) gelten für $\gamma_{\tilde v}|_{[0,t)}$.

(c) • $I_{\tilde v} \subset I_v$

• $(\tilde M, \tilde g)$ geod. vollst. $\Rightarrow$ (M,g) geod. vollst.

Beweis: $\gamma_{\tilde v}$ def. auf (t_0, t_1) $\Rightarrow$ $F \circ \gamma_{\tilde v}$ ist Geodätische def. auf (t_0, t_1)

$\Rightarrow$ $\gamma_v = F \circ \gamma_{\tilde v}$ def. auf (t_0, t_1) $\Rightarrow$ $I_{\tilde v} \subseteq I_v$

• $(\tilde M, \tilde g)$ geod. vollst. $\rightarrow$ $I_{\tilde v} = \mathbb{R}$ für alle $\tilde v \in T_{\tilde p}\tilde M$ und alle $\tilde p \in \tilde M$

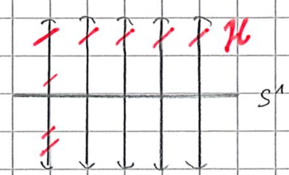
$\Rightarrow$ $I_{\tilde v} = \mathbb{R}$ für alle $\tilde v \in \mathcal{H}_{\tilde p}$ und $\tilde p \in \tilde M$

$\Rightarrow$ $I_v = \mathbb{R}$ für alle $v \in T_pM$ und $p \in M$.

F PR-Submersion.

Beispiel für echte Inklusion:

$\tilde M = (0,1) \times S^1$, $M = S^1$ mit geneigter horiz. Distribution.



S^1 ist geod. vollständig, $\tilde M$ mit dieser Metrik nicht.