Aufgabe 1 20. Nov. 2018

Blatt 5

(M,g) PR-Mfkt., $X \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfeld

zz: X Killing $\Longleftrightarrow$ $(u_1,u_2) \longmapsto g(\nabla^M_{u_1} X, u_2)$ schiefsymmetrisch

Vorl: X Killing $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ ϕ_X^t Isometrie

$\overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{L}_X g = 0$.

Beweis: Koszul-Formel: $2g(\nabla_\cdot Y, \cdot) = \mathcal{L}_Y g + d(\flat(Y))$

„$\Rightarrow$" $2g(\nabla_\cdot X, \cdot) = \mathcal{L}_X g + d(\flat(X)) \overset{X \text{ Kill.}}{=} d(\flat(X))$

$\Rightarrow$ $g(\nabla_\cdot X, \cdot)$ schiefsymmetrisch (als 2-Form)

„$\Leftarrow$": $(\mathcal{L}_X g)(u_1,u_2) = 2g(\nabla_{u_1}X, u_2) - d(\flat(X))(u_1,u_2)$

$= -(2g(\nabla_{u_2}X, u_1) - d(\flat(X))(u_2,u_1))$

$= -(\mathcal{L}_X g)(u_2,u_1) = -(\mathcal{L}_X g)(u_1,u_2)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_X g = 0$

zz: $g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), X\circ\gamma)$ ist konstant für γ Geodätische, X Killing

Beweis: $d(g(\dot\gamma(t), X\circ\gamma))(\dot\gamma(t)) = g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, X\circ\gamma) + g(\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma} X)$

$= 0 + g(\nabla_{\dot\gamma} X, \dot\gamma)$

$= -g(\nabla_{\dot\gamma} X, \dot\gamma)$

$\Rightarrow$ $d(g(\dot\gamma(t), X\circ\gamma))(\dot\gamma(t)) = 0$

$\Rightarrow$ $g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), X\circ\gamma)$ konstant entlang $\gamma(t)$.

$M = (\vartheta_0, \vartheta_1) \times S^1$, $g = d\vartheta^2 + r^2(\vartheta)\, d\phi^2$, $r: (\vartheta_0,\vartheta_1) \longrightarrow (0,\infty)$

zz: ∂_ϕ ist Killing

Bew.: Fluss von ∂_ϕ: $\Phi^t_{\partial_\phi}(\vartheta,\phi) = (\vartheta, \phi + t)$ $\quad S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$(\Phi^t_{\partial_\phi})^* g = g \Rightarrow \partial_\phi$ Killing

(a) zz: $r^2(\vartheta_\gamma)\dot\phi_\gamma$ ist konstant für Geodätische $(\vartheta_\gamma, \phi_\gamma): (t_0,t_1) \to (r_0,r_1) \times S^1$

Bew: konst $= g_{\gamma(t)}(\dot\gamma, \partial_\phi\circ\gamma) = r^2(\vartheta)\, d\phi^2(\dot\phi_\gamma, \partial_\phi\circ\gamma) = r^2(\vartheta)\cdot\dot\phi_\gamma$

Interpretation: Entfernung von der Drehachse ist quadratisch antiproportional zur Winkelgeschwindigkeit.

$r \cdot \underbrace{(r\cdot\dot\vartheta)}_{\text{Drehmoment}}$

Entfernung

f) z.z.: • $g(\nabla_\cdot \partial_\phi, \cdot) = r'(\vartheta) r(\vartheta)\, d\vartheta \wedge d\phi$

• $t \mapsto (\vartheta_0, \phi_0 + t)$ ist Geodätische $\Leftrightarrow$ $r'(\vartheta_0) = 0$.

Beweis: $g(\nabla_\cdot \partial_\phi, \cdot) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\partial_\phi} g + d(b\, \partial_\phi))$

$= \frac{1}{2}\, d(g(\partial_\phi, \cdot))$

$= \frac{1}{2}\, d(r^2(\vartheta)\, d\phi) = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r'\, d\vartheta \wedge d\phi$

$g(\nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi, Y) = r \cdot r'\, d\vartheta \wedge d\phi\, (\partial_\phi, Y)$

$= - r(\gamma_\vartheta(t))\, r'(\gamma_\vartheta(t))\, d\vartheta(Y)$

γ Geod. $\Rightarrow 0 = - r \cdot r'\, d\vartheta(Y)$ für alle Y

$\Rightarrow r'(\vartheta_0) = 0$

$r' = 0 \Rightarrow g(\nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi, Y) = 0$ für alle $Y \Rightarrow \nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi = 0$.

$\gamma = (\vartheta_\gamma, \phi_\gamma) : \mathbb{R} \to M$ Geod., $r^2(\vartheta_\gamma) \cdot \dot\phi = c$, $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$

z.z.! $\ddot\vartheta_\gamma = c^2 \cdot \frac{r'}{r^3}(\vartheta_\gamma)$, $\dot\phi = \frac{c}{r^2(\vartheta_\gamma)}$

Beweis: $r > 0 \Rightarrow \dot\phi = c/r^2(\vartheta_\gamma)$

$0 = d/dt\; g(\dot\gamma, \dot\gamma) = d/dt\, (\dot\vartheta_\gamma^2 + r^2(\vartheta_\gamma) \cdot \dot\phi_\gamma^2)$

$= 2 \dot\vartheta_\gamma \ddot\vartheta_\gamma + 2 r(\vartheta_\gamma) \cdot r'(\vartheta_\gamma) \cdot \dot\vartheta_\gamma \cdot \dot\phi_\gamma^2 + r^2(\vartheta_\gamma) \cdot 2 \cdot \dot\phi_\gamma \cdot \ddot\phi_\gamma$

$\dot\phi = \frac{c}{r^2}$ $\quad = 2 \cdot (\dot\vartheta_\gamma (\ddot\vartheta_\gamma + \frac{c^2 \cdot r'}{r^3}) + c \cdot \ddot\phi_\gamma)$

$\left[\dot\phi = c/r^2(\vartheta_\gamma) \Rightarrow \ddot\phi = \frac{- c\, 2 r(\vartheta_\gamma) \cdot r'(\vartheta_\gamma) \cdot \dot\vartheta_\gamma}{r^4(\vartheta_\gamma)} = - \frac{2c\, r'(\vartheta_\gamma) \cdot \dot\vartheta_\gamma}{r^3(\vartheta_\gamma)} \right]$

$= 2(\dot\vartheta_\gamma (\ddot\vartheta_\gamma - c^2 \cdot \frac{r'}{r^3}))$

$\Rightarrow \ddot\vartheta_\gamma = c^2 \cdot \frac{r'}{r^3}(\vartheta_\gamma)$ oder $\dot\vartheta_\gamma = 0$.

Falls $\ddot\vartheta_\gamma(t_0) \neq c^2 \cdot \frac{r'}{r^3}(\vartheta_\gamma)$ für $t_0 \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine offene Umg von t_0 auf der die Ungleichung gilt. Auf dieser Umg muss dann $\dot\vartheta_\gamma = 0$ sein. (Bis auf Umparam) Entspricht dies einer Flusslinie wie in (b).

(insb. $r(\vartheta) = $ konst $\Rightarrow \dot\phi_\gamma = $ konst, $1 = g(\dot\gamma, \dot\gamma) \Rightarrow \dot\phi_\gamma = 1$)

$\Rightarrow r' = 0 \Rightarrow c^2 \cdot \frac{r'}{r^3}(\vartheta_\gamma) = 0 = \ddot\vartheta_\gamma$ (da $\dot\vartheta_\gamma \equiv 0$) $\lightning$.

$c=0$: $\ddot{\vartheta}=0$, $\dot{\phi}=0$

$\rightarrow \gamma = (\vartheta_0 + \dot{\vartheta}_0 \cdot t, \phi_0)$

$c>0$: Z.z.: $r(\vartheta_\gamma(t)) \geq c$ und Gleichheit gilt g.d.w. $\dot{\vartheta}_\gamma(t)=0$.

Beweis: $r^2(\vartheta_\gamma) \cdot \dot{\phi}_\gamma = c > 0$

$$1 = g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) = \dot{\vartheta}_\gamma^2 + r^2(\vartheta_\gamma)\cdot\dot{\phi}_\gamma^2 = \dot{\vartheta}^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

$$\rightarrow 0 \leq \dot{\vartheta}^2 r^2 = r^2 - c^2 \Rightarrow c^2 \leq r^2 \overset{c,r>0}{\Rightarrow} c \leq r$$

Gleichheit: $\Rightarrow \dot{\vartheta}^2 r^2 = r^2 - c^2 = 0 \rightarrow \dot{\vartheta} = 0$

$\dot{\vartheta} = 0 \rightarrow 0 = \dot{\vartheta} r^2 = r^2 - c^2 \rightarrow c = r$.

Sei $[\vartheta_-, \vartheta_+] \subset (\vartheta_0, \vartheta_1)$, $r(\vartheta) > c$ für $\vartheta \in (\vartheta_-, \vartheta_+)$, $r(\vartheta) = c$ für $\vartheta = \vartheta_\pm$

Wissen: $r(\vartheta_\pm) = c \Rightarrow \dot{\vartheta}(t^{-1}(\vartheta_\pm)) = 0$ falls $t^{-1}(\vartheta_\pm)$ nicht leer.

Haben zwei Möglichkeiten bei ϑ_+

ϑ_+ krit. von r:

Dann ist $(\vartheta_+, \phi_0 + t)$ Geodätische

Falls γ Geodätische, die $\{\vartheta = \vartheta_+\}$ schneidet und $\dot{\vartheta}_\gamma = 0$ erfüllt ~~gilt~~ stimmt γ mit $(\vartheta_+, \phi_0 + t)$ überein (bis auf Param.)

Da $\dot{\vartheta}_\gamma \neq 0$ auf $(\vartheta_-, \vartheta_+)$ ist ϑ auf diese Bereich monoton wachsend oder fallend (wir betrachten wachsend). Aus der obigen Beobachtung wissen wir, dass ϑ_γ von oben durch ϑ_+ beschränkt ist.

Die Winkelgeschw. ist von unten beschränkt. Das heißt die Geodätische γ nähert sich asymptotisch an $\{\vartheta = \vartheta_+\}$ an.

ϑ_+ kein kritischer Punkt:

In diesem Fall hat ~~auch~~ ϑ_γ ein Maximum. und die Geod. läuft zurück

Analog für ϑ_-, Komb. alle Fälle für vollständiges Bild.

Aufgabe 2

$M = (0,\infty) \times S^1$, $g = d\vartheta^2 + \sin(\alpha)^2 \vartheta^2 \, d\phi^2$; $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$V = \{(r,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ 0 < \beta < 2\pi \sin\alpha\}$

Z.z.: $F_{\phi_0} : (\{(\vartheta,\phi) \in M \mid \phi \neq \phi_0\}, g) \to (V, g_{\mathbb{R}^2})$

$$(\vartheta, \phi) \longmapsto (\vartheta, (\phi - \phi_0)\cdot \sin\alpha)$$

ist isometr. Diffeom.

<u>Beweis:</u> $F^{-1}(r,\beta) = (r,\ \beta/\sin(\alpha) + \phi_0)$ ist Inverse

$\rightsquigarrow F, F^{-1}$ sind diff'bar.

$\rightsquigarrow g_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 \, d\beta^2$

$\rightsquigarrow (F^* g_{\mathbb{R}^2}) = d\vartheta^2 + \vartheta^2 \cdot (d((\phi - \phi_0)\sin\alpha))^2$

$= d\vartheta^2 + \vartheta^2 \sin(\alpha)^2 \, d\phi^2$.

γ max. Geod. mit $c = r^2(\vartheta_\gamma)\cdot\dot\phi_\gamma = \sin(\alpha)^2 \vartheta^2 \cdot \dot\phi_\gamma \neq 0$

Z.z.: • γ ist für alle Zeiten definiert

• γ ist eingebettet genau für $\alpha \in [\pi/6, \pi/2)$

<u>Beweis:</u> F_{ϕ_0} Isometrie $\Rightarrow F(\gamma)$ Geodätische in $V, g_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow F(\gamma)$ Gerade (jede Zsh. Komp. ist)

$F(\gamma)$ ist nicht für alle t definiert, falls

$\lim_{t \to t_0} F(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \vartheta_\gamma \to 0$

Aus Aufgabe 1 wissen wir $0 < c \le r(\vartheta_\gamma(t)) = \sin\alpha \cdot \vartheta$

$\Rightarrow \vartheta$ ist von unten beschränkt

$\Rightarrow \gamma$ ist für alle t definiert.

Wähle ϕ_0 so dass eine unbeschränkte Komponente von $F(\gamma)$ gleich $\{y = \text{konst.} > 0\}$ ist.

Für $\alpha \in [\pi/6, \pi/2)$ hat diese Menge leeren Schnitt mit ∂V.

$\Rightarrow \gamma$ ist eingebettet.

Für $\alpha \in (0, \pi/6)$ ist der Schnitt nicht-leer und die Kurve trifft mit einem Winkel φ_1 von $|\pi - 2\pi \cdot \sin\alpha|$ wieder aus der x-Achse aus.

Für $\varphi_1 > 2\pi \sin\alpha$ gibt es wieder einen Schnitt mit dem Rand von V und die Kurve tritt mit einem Winkel $\varphi_2 = \pi - 4\pi \sin\alpha$ aus der x-Achse aus.

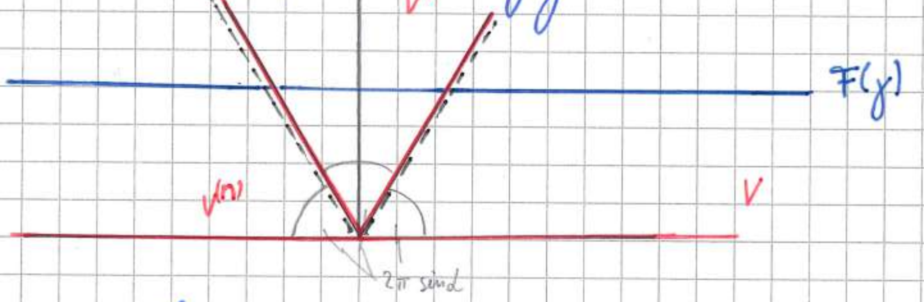
Für $\varphi_1 < 2\pi \sin\alpha$ gibt es keine weiteren Schnittpunkt mit dem Rand von V. Die y-Koord. dieser Komp. ist also unbeschränkt.
Stetigkeit: Es gibt einen Schnitt mit $\{y = \text{konst} > 0\}$
$\Rightarrow$ Selbstschnittpunkt von γ.

Solange $\varphi_k = \pi - k \cdot 2\pi \sin\alpha > 2\pi \sin\alpha$ gibt es weitere Schnitte mit dem Rand von V. Für $\varphi_k < 2\pi \sin\alpha$ gibt es keinen weiteren Schnitt und die y-Koord. der Komponente ist unbeschränkt hat also einen Schnitt mit $\{y = \text{konst.} > 0\}$.

<u>Beh:</u>

$$\text{Anzahl der Selbstschnittpunkte} = \begin{cases} 0 & \sin\alpha \in [\frac{1}{2}, 1) \\ n & \sin\alpha \in [\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2n}) \end{cases}$$

Den Fall $\sin\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ haben wir bereits diskutiert.
Für $2\pi \sin\alpha \in [\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n})$ haben wir das folgende Bild.



~~F(γ) durchläuft n Kopien von V.~~
Wir betrachten nun die Halbgeraden l_k die einen Winkel von $k \cdot \pi \sin\alpha$ zur y-Achse haben. $k \in \mathbb{N}$, s.d. $k \cdot \pi \cdot \sin\alpha < \pi/2$
Ein Punkt auf $F(\gamma)$ ist ein Selbstschnittpunkt von γ g.d.w. es einen zweiten Punkt auf $F(\gamma)$ gibt der den selben Abstand vom Ursprung hat und durch Drehung um ein Vielfaches von $2\pi \sin\alpha$ auf $F(\gamma)$ hervorgeht.
Für $F(\gamma) \in \{x \geq 0\}$ $\{x \leq 0\}$ sind die Abstände von 2 versch. Punkten verschieden.
Jeder Schnitt von $F(\gamma)$ mit einer der Halbgeraden entspricht. Also gibt es
$K = \max k$ Schnittpunkte $\quad k < \frac{\pi}{2\pi \sin\alpha} < n+1 \quad \rightarrow \quad K < n+1$
$n \pi \sin\alpha < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad n \leq K \qquad \Rightarrow \quad K = n.$