Aufgabe 1

$\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ Riem. Submersion

$\gamma : [t_0, t_1] \to \tilde{M}$ stückw. glatte Kurve

z.z.: • $L_{\tilde{g}}(\gamma) \geq L_g(\pi \circ \gamma)$

• $d_{\tilde{g}}(p_1, p_2) \geq d_g(\pi(p_1), \pi(p_2))$

Beweis: • Schreibe $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\mathcal{V}} + \dot{\gamma}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = T\tilde{M}$, wobei

$\mathcal{V} = \ker \pi$, $\mathcal{H} = \mathcal{V}^{\perp_g}$

Dann gilt: $\|\dot{\gamma}_{\mathcal{H}}\|^2 \underset{\text{Riem.}}{\leq} \|\dot{\gamma}_{\mathcal{H}}\|^2 + \|\dot{\gamma}_{\mathcal{V}}\|^2 \underset{\mathcal{V}, \mathcal{H} \text{ orthogonal}}{=} \|\dot{\gamma}\|^2$

π R-Submersion, insb. $\pi : \mathcal{H} \to TM$ isometrisch

$\Rightarrow \|(\pi \circ \gamma)^{\cdot}\|_g = \|\dot{\gamma}_{\mathcal{H}}\|_g \leq \|\dot{\gamma}\|_{\tilde{g}}$

$\Rightarrow L_g(\pi \circ \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|(\pi \circ \gamma)^{\cdot}\|_g \, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|_{\tilde{g}} \, dt = L_{\tilde{g}}(\gamma).$

• Sei $p_1, p_2 \in \tilde{M}$

$d_{\tilde{g}}(p_1, p_2) = \inf_{\tilde{\gamma}} L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}) \geq \inf_{\tilde{\gamma}} L_g(\pi \circ \tilde{\gamma}) \geq \inf_{\gamma} L_g(\gamma) = d_g(\pi(p_1), \pi(p_2))$

Aufgabe 2

G glatte Linkswirk., M Mgf., s.d. (i) & (ii)

$\pi : M \to M/G$ Quotientenabb.

(a) zz! • M/G ist hausdorffsch

• $\pi : M \to M/G$ ist Überlagerung

Beweis: • Seien $p_1, p_2 \in M/G$, $p_1 \neq p_2$

Finde $U_i \subseteq M/G$ offen Umg. von p_i s.d. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Idee: Finde $\tilde{U}_i \subseteq M$ offen s.d. • $\pi^{-1}(p_i) \subseteq \tilde{U}_i$

• $G \cdot \tilde{U}_i = \tilde{U}_i$ (d.h. $\forall g \in G : g\,\tilde{U}_i = \tilde{U}_i$

• $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$

Setze dann $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$

Nach Eigenschaft (ii): für $\tilde{p}_i \in \pi^{-1}(p_i)$

Es existiert U Umg. von $\tilde{p}_1$, U' Umg. von $\tilde{p}_2$:

$g \cdot U \cap U' = \emptyset$ $\forall g \in G$

$\Rightarrow U \cap g \cdot U' = \emptyset$ — " —

Sei $\tilde{U}_1 = G \cdot U = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$

$\tilde{U}_2 = G \cdot U'$

Dann $\tilde{U}_i$ offen, $\pi^{-1}(p_i) = G \cdot \{\tilde{p}_i\} \subseteq \tilde{U}_i$

$G \cdot \tilde{U}_i = \tilde{U}_i$, $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$.

• $\pi : M \to M/G$ ist stetig und surjektiv (Def. der Q. abb.)

z.zz! $\forall p \in M/G$, $\exists U$ Umg. von p : $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} S_i$, S_i homöo zu U via π.

Sei $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ wähle Umg. U' s.d. $g\,U' \cap U' = \emptyset$ $\forall g \in G \setminus \{e\}$

(nach Eigensch. (i))

Sei $U = \pi(U')$. $\pi^{-1}(U) = G \cdot U'$ ist disj. Vereinigung und

$\pi(g \cdot U') = \pi(U') = U$

■

b) $(\pi(\mathcal{U}), \varphi\circ(\pi|_{\mathcal{U}}))$ Karte von M/G

z.z. Zwei Karten mit $(\mathcal{U},\varphi)$ und $(\mathcal{U}',\varphi')$ sind verträglich.

Beweis: Betrachte $\pi(\mathcal{U})\cap\pi(\mathcal{U}')\neq\emptyset$

Problem: Es kann sein, dass $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'=\emptyset$.

Beispiel: $\pi:\mathbb{R}\to S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\mathcal{U}=(0,1)$, $\mathcal{U}'=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$

Sei $\emptyset\neq W\subseteq\pi(\mathcal{U})\cap\pi(\mathcal{U}')$ zusammenhängend.

Setze $\mathcal{U}''=(\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(W)$

Sei $p\in W$, dann ex. $\gamma_p\in G$ s.d. $\gamma_p((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p))=(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(p)$

Beh.: W zusam. $\Rightarrow$ $\gamma_p=\gamma_{p'}$ $\forall$ $p,p'\in W$.

Betrachte $W_p=\{p'\in W:\gamma_{p'}=\gamma_p\}$ für $p\in W$.

W_p nicht-leer $(p\in W_p)$

W_p abg.: Sei $p_n\in W_p$ mit $p_n\to p_0\in W$. Dann

$$\gamma_{p}((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p_n))=\gamma_{p_n}((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p_n))=(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(p_n)$$

$$\gamma_p((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p_0))\qquad\gamma_{p_0}((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p_0))=(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(p_0)$$

$\Rightarrow$ $\gamma_{p_0}=\gamma_p$.

W_p offen: Sei $p'\in W_p$

$\gamma_p((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p'))=(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(p')\in\mathcal{U}'$

$\gamma_p(\mathcal{U})\cap\mathcal{U}'$ ist off. Umg. von $(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(p')$

$\Rightarrow$ $\gamma_p^{-1}(\mathcal{U}')\cap\mathcal{U}$ ist Umg von $(\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p')$

$\Rightarrow$ $\pi|_{\mathcal{U}}(\gamma_p^{-1}(\mathcal{U}')\cap\mathcal{U})$ ist offene Umg. von p' mit $\gamma_p((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(p''))\in\mathcal{U}'$

$\forall\, p''\in\pi|_{\mathcal{U}}(\gamma_p^{-1}(\mathcal{U}')\cap\mathcal{U})$

$\Rightarrow$ $W_p=W$.

Sei $\pi(\mathcal{U})\cap\pi(\mathcal{U}')=\bigsqcup_{i\in I}W_i\neq\emptyset$ $\quad W_i\neq\emptyset$ zsh.

Für alle i ex. $\gamma_i\in G$: $\gamma_i((\pi|_{\mathcal{U}})^{-1}(W_i))=(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(W_i)$

$$\varphi'\circ(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(\varphi\circ(\pi|_{\mathcal{U}})^{-1})^{-1}|_{(\varphi\circ\pi^{-1})(W_i)}=\varphi'\circ(\pi|_{\mathcal{U}'})^{-1}(\pi|_{\mathcal{U}})\circ\varphi^{-1}|_{(\varphi\circ\pi^{-1})(W_i)}$$

$=\varphi'\circ\gamma_i\circ\varphi^{-1}|_{(\varphi\circ\pi^{-1})(W_i)}$ ist Diffeo, da γ_i Diffeo auf M.

c) $\psi : W \to Z$ Karte einer glatten Struktur auf M/G s.d. $\pi : M \to M/G$ lokaler Diffeo

Bel: ψ und $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$ sind verträglich.

- $\psi \circ (\varphi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1}|_\cdot = \psi \circ \pi|_U \circ \varphi^{-1}$ Diffeo, da π lokaler Diffeo bzgl. ψ und φ.

- $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} \circ \psi^{-1}$ —— " ——

$\Rightarrow$ ψ ist enthalten in dem minimalen Atlas, der (b) enthält

(b) ist in dem Atlas aus (c) enthalten.

d) $G = \{\psi_{m,n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ $\quad \psi_{m,n}(x,y) = (x+m, (-1)^m \cdot y + n)$

$\mathbb{Z}^2$ mit der Gruppenstruktur

$$(m,n) + (m',n') = (m+m', n + (-1)^m n')$$

Bel: G ist Linkswirkung auf $\mathbb{R}^2$ mit (i) & (ii)

- Gruppenhomom.:

$$\begin{aligned}
\psi_{m,n} \circ \psi_{m',n'}(x,y) &= \psi_{m,n}(x+m', (-1)^{m'} y + n') \\
&= (x + m' + m, (-1)^m \cdot ((-1)^{m'} y + n') + n) \\
&= (x + (m'+m), (-1)^{m+m'} y + ((-1)^m \cdot n' + n)) \\
&= \psi_{(m+m', n + (-1)^m n')}(x,y) \\
&= \psi_{(m,n)+(m',n')}(x,y)
\end{aligned}$$

- $\Psi : \mathbb{Z}^2 \times M \to M$ ist glatt.
- (i) $d((x,y), \psi_{m,n}(x,y))$ für $(m,n) \neq (0,0)$

$$= d((x,y), (x+m, (-1)^m \cdot y + n))$$
$$= \sqrt{|m|^2 + |y - (-1)^m y - n|^2} \geq \begin{cases} |n| \geq 1 & \text{falls } m = 0 \\ |m| \geq 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $0 < \varepsilon < 1/2$ und $U = B_\varepsilon(p)$, dann gilt $\gamma \cdot U \cap U = \emptyset$ für alle $\gamma \neq \mathrm{id}$.

Γ $(x,y) \in (\gamma U \cap U)$: dann $1 \leq d(p, \psi_{m,n}(p)) \leq d(p,(x,y)) + d((x,y), \psi_{m,n}(p))$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon < 1 \ \text{⚡}$$

$\lrcorner$

∘ (ii) : Seien $p, p' \in \mathbb{R}^2$ $p' \notin G \cdot p$

Betrachte $0 < \varepsilon := \min_{(m,n)} d(\gamma_{m,n}(p), p')$

$U = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$, $U' = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p')$

$\gamma \in G$: $\gamma U \cap U' = \emptyset$

⌈ $\gamma_{m,n}(a,b) = (x,y) \in \gamma U \cap U'$:

$\varepsilon \leq d(\gamma_{m,n}(p), p') \leq d(\gamma_{m,n}(p), \gamma_{m,n}(a,b)) + d((x,y), p') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ↯ ⌋

<u>Beh:</u> $\mathbb{R}^2/G$ besitzt Metrik s.d. $\pi : (\mathbb{R}^2, g_{\mathbb{R}^2}) \to (\mathbb{R}^2/G, \quad)$ eine Riem. Überlagerung ist.

$\gamma_{(m,n)}^* g_{\mathbb{R}^2} = g_{\mathbb{R}^2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \cdot , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \cdot \right) = g_{\mathbb{R}^2}$.

$\Rightarrow$ $g_{\mathbb{R}^2}$ definiert eine Metrik auf dem Quotienten.

Aufgabe 3

- Γ_1, Γ_2 Gitter in $\mathbb{R}^n$

Z.z.! $(\mathbb{R}^n/\Gamma_1, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_1})$ ist isometrisch zu $(\mathbb{R}^n/\Gamma_2, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_2})$

$\Leftrightarrow$ $A \in O(n)$ mit $A(\Gamma_1) = \Gamma_2$ existiert.

Bew: „$\Leftarrow$": Wir haben
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{R}^n/\Gamma_1 & \mathbb{R}^n/\Gamma_2 \end{tikzcd}$$

Definiere $\Phi([p]_{\Gamma_1}) = [A\,p]_{\Gamma_2}$

Wohldef: Sei $p' \in [p]_{\Gamma_1}$, d.h. $p' = p + \gamma_1$, $\gamma_1 \in \Gamma_1$.
$$\Phi([p']) = [A \cdot p']_{\Gamma_2} = [A \cdot p + \underbrace{A \cdot \gamma_1}_{\in \Gamma_2}]_{\Gamma_2} = [A \cdot p]_{\Gamma_2}$$

Isom: π_1, π_2 lokale Isom.:
$$g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_2,\, \pi_2(A\cdot p)} = g_{\mathbb{R}^n, A p} = g_{\mathbb{R}^n, A\cdot p}(A\,\cdot, A\,\cdot) = g_{\mathbb{R}^n, p} = g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_1, p}$$

Diffeo: A invertierbar $\Rightarrow$ $[p]_{\Gamma_2} \longmapsto [A^{-1} p]_{\Gamma_1}$ ist Inverses.

„$\Rightarrow$": Wir haben
$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi_{\Gamma_1}"'] \arrow[dr, "\Phi \circ \pi_1"] & (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \arrow[d, "\pi_{\Gamma_2}"] \\ (\mathbb{R}^n/\Gamma_1, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_1}) \arrow[r, "\Phi"'] & (\mathbb{R}^n/\Gamma_2, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_2}) \end{tikzcd}$$

$(\Phi \circ \pi_{\Gamma_1})_* (\pi_1(\mathbb{R}^n)) \subset (\pi_{\Gamma_2})_* (\pi_1(\mathbb{R}^n))$

$\Rightarrow$ $\exists!\ \tilde{\Phi} : (\mathbb{R}^n, g) \to (\mathbb{R}^n, g)$ mit $\tilde{\Phi}(0) = 0$, und $\Phi \circ \pi_{\Gamma_1} = \pi_{\Gamma_2} \circ \tilde{\Phi}$

(Im Allg. $\tilde{\Phi}(\Gamma_1) = \Gamma_2$ o.E. $\tilde{\Phi}(0) = 0$.)

Analog $\exists!\ \tilde{\Psi} : (\mathbb{R}^n, g) \to (\mathbb{R}^n, g)$ mit $\tilde{\Psi}(0) = 0$ und $\Psi \circ \pi_{\Gamma_2} = \pi_{\Gamma_1} \circ \tilde{\Psi}$

π_1, π_2, Φ lokale Isometrien $\Rightarrow$ $\tilde{\Phi}$ Isometrie von $\mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\Phi}(\Gamma_1) = \Gamma_2$

und $\tilde{\Phi}(0) = 0$

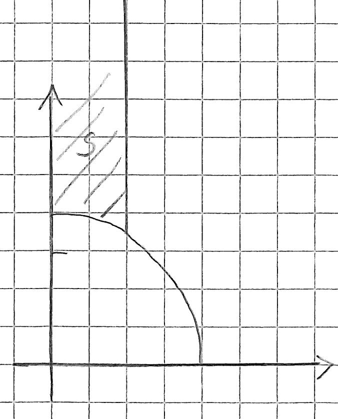
$\Rightarrow$ $\tilde{\Phi} = A \in O(n)$.

- Klassifiziere die R-Mft. $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma})$.

Sei $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1/2,\ y > 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$

$(a, v) \in (0, \infty) \times S$

$\Gamma_{(a,v)} = \langle \binom{1}{0}, a \cdot v \rangle_{\mathbb{Z}}$



__Zeige:__ Für alle Gitter Γ ex. genau ein $\Gamma_{(a,v)}$ s.d. $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma})$ und $(\mathbb{R}^2/\Gamma_{(a,v)}, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma_{(a,v)}})$ isometrisch sind.

Wähle $u_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$ mit kleinster eukl. Norm.

Dann ex. eine Drehung ϱ mit $\varrho u_1 = (a,0) = (|u_1|, 0)$.

Betrachte nun $\Gamma' = \{u \in \varrho\Gamma : pr_y(u) \neq 0$ ~~und~~ und $|pr_y(u)| = \min_{\substack{u \in \varrho(\Gamma) \\ u \neq (a,0)}} |pr_y(u)|\}$

Dann ist Γ' nicht-leer, da Γ von Basis des $\mathbb{R}^2$ aufgespannt.

Wähle $u_2 \in \Gamma'$ s.d. $|pr_x(u_2)|$ minimal o.E. $pr_y(u_2) > 0$, da $-u_2 \in \Gamma'$.

__Beh:__ Bis auf Spiegeln an der y-Achse: $u_2/a \in S$.

$|u_2/a| \geq 1$, da a minimal über alle Beträge

$pr_y u_2 > 0$.

Falls $|pr_x u_2/a| > 1/2$, dann $|pr_x u_2| > \frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ $|pr_x(u_2 \pm \binom{a}{0})| < |pr_x u_2|$ ↯ zu u_2 mit min x-Betrag.

$\Rightarrow$ $A := S \circ \varrho$ bildet $u_1, \varrho^{-1} u_2$ auf $(a,0)$, $a \cdot v$ ab mit $v \in S$.

__Beh:__ $A(\Gamma) = \Gamma_{(a,v)}$:

$\Gamma_{(a,v)} \subseteq A(\Gamma)$ klar (treffen Erzeuger von Bild).

Ann.: $\exists\, w \in \varrho\Gamma : A\varrho^{-1} w \notin \Gamma_{(a,v)} \Rightarrow w$ not a linear comb. of $(a,0)$, u_2. , o.E. $pr_y(w) \geq 0$

Sei $c_2 \in \mathbb{N}_0$ s.d.: $pr_y(w) \in [c_2 \cdot pr_y(u_2), (c_2+1)\, pr_y(u_2))$

$\Rightarrow$ $pr_y(w - c_2 u_2) \in [0, pr_y(u_2)) \Rightarrow pr_y(w) = pr_y(u_2)$,

da u_2 mit minimalem y-Betrag

Sei $c_1 \in \mathbb{Z}$: $pr_x(\varrho w - c_2 u_2) \in [c_1 a, (c_1+1) \cdot a)$

$\Rightarrow$ $(w - c_1 \cdot (a,0) - c_2 u_2) = (z, 0) \in [0, a)$

$z \neq 0$ sonst $w = c_1 \cdot (a,0) + c_2 \cdot u_2$

$\Rightarrow$ $|z| = |w| < a$ ↯ $(a,0)$ mit minimalem Betrag.

$\Rightarrow$ $A(\Gamma) = \Gamma_{(a,v)}$

1. Teil: $\mathbb{R}^2/\Gamma \cong \mathbb{R}^2/\Gamma_{(a,v)} \Leftrightarrow \exists\, A \in O(n)$ mit $A(\Gamma) = \Gamma_{(a,v)}$

Des Weiteren: $\Gamma_{(a,v)}$ und $\Gamma_{(a',v')}$ lassen sich nicht durch ein Element $\in O(n)$ ineinander überführen $\Rightarrow$ $(0,\infty) \times S$ klassifiziert die Quotienten $\mathbb{R}^2/\Gamma$.