31.Okt. 2019
Blatt 1

Blatt 1

Aufgabe 1

V $\mathbb{R}$-Vektorraum, g_1, g_2 Skalarprodukte

z.z. $g_2 = f^2 \cdot g_1$ für $f>0 \iff g_1, g_2$ bestimmen dieselben unorientierten Winkel.

Wdh: Unorientierter Winkel zwischen u, v ist $\cos_g(\vartheta) = \dfrac{g(u,v)}{|u|_g |v|_g}$

Beweis: „$\Rightarrow$": $\cos_{g_2}(\vartheta) = \dfrac{g_2(u,v)}{|u|_{g_2}|v|_{g_2}} = \dfrac{f^2 g_1(u,v)}{f \cdot |u|_{g_1} \cdot f |v|_{g_1}} = \cos_{g_1}(\vartheta)$

„$\Leftarrow$": Wir betrachten u, v l.u. und g_1 orthogonal und berechnen den Winkel zwischen $u+v$ & $u-v$:

$$\cos_{g_1}(\vartheta) = \frac{g_1(u+v, u-v)}{|u+v|_{g_1} \cdot |u-v|_{g_1}} = \dots = \frac{|u|_{g_1}^2 - |v|_{g_1}^2}{\sqrt{(|u|_{g_1}^2 + |v|_{g_1}^2)^2 - 4 g_1(u,v)^2}}$$

$$= 0$$

Für $|u|_{g_1} = |v|_{g_1}$

$\Rightarrow$ $u+v$ & $u-v$ sind g_1-orthogonal.

Andererseits folgt aus der Annahme

$$0 = \cos_{g_1}(\vartheta) = \cos_{g_2}(\vartheta) = \frac{g_2(u+v, u-v)}{|u+v|_{g_2} \, |u-v|_{g_2}} = \dots = \frac{|u|_{g_2}^2 - |v|_{g_2}^2}{\sqrt{(|u|_{g_2}^2 + |v|_{g_2}^2)^2 - 4 g_2(u,v)^2}}$$

$\Rightarrow$ ~~$u+v$ & $u-v$ sind g_2-orthogonal~~

~~$u+v, u-v$ sind g_2-orthog.~~ & $|u|_{g_2} = |v|_{g_2}$, weiter $\dfrac{g_2(u,v)}{|u|_{g_2}|v|_{g_2}} = \dfrac{g_1(u,v)}{|u|_{g_1}|v|_{g_1}} = 0$.

~~Setze $e_1 := u+v$, $e_2 = u-v$~~ ~~das~~ u, v sind orthogonale Basis für g_1 und g_2

Definiere $f^2 = \dfrac{g_2(u,u)}{g_1(u,u)}$

Dann:

$$g_2(v,v) = g_2(u,u) = f^2 \cdot g_1(u,u) = f^2 \cdot g_1(v,v)$$

$$g_2(u,v) = 0 = g_1(u,v) = f^2 \cdot g_1(u,v)$$

$\Rightarrow$ Beh. denn

$$g_2(a\cdot u + b\cdot v, c\cdot u + d\cdot v) = ac \cdot f^2 g_1(u,u) + b\cdot d f^2 g_1(v,v) = f^2 g_1(a\cdot u + b\cdot v, c\cdot u + d\cdot v).$$

Aufgabe 2 | 31. Okt. 2019
Blatt 1

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $z: U \to \mathbb{R}$ glatt

$z: U \xrightarrow{} \mathbb{R}^3$, $z(u,v) = (u,v,z(u,v))$

Finde • Matrixdarstellung von $g := z^* g_{eukl.}$ bzgl. $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$

• —"— $\#: T^*U \to TU$ —"—

• —"— $g_{(1,2)} = dx^2 + dy^2 - dz^2$ —"—

Wann ist $z^* g_{(1,2)}$ eine Riem. Metrik?

Allg.: • $(g_{ij})_{ij}$ ist gegeb. durch $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ und

$$(f^* g_{eukl})_p (w_1, w_2) = (g_{eukl})_{f(p)} (d_p f\, w_1, d_p f\, w_2)$$

$$\Rightarrow \quad (z^* g_{eukl})_{ij,(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)^2 & \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

• $\#$ ist die Umkehrabb. zu $\flat: TM \to T^*M$ mit $\flat(w) = \iota_w g$

Diese ist durch (g_{ij}) dargestellt (aufgefasst als lineare Abb.)

Damit ist $\#$ durch das Inverse dieser Matrix gegeben, also

$$(\#)_{ij,(u,v)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

• Wie oben:

$$z^* g_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} & 1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

• Müssen den Fall mit $z^* g_{(1,2)}$ positiv definit finden. Betrachte die Hauptminore

$1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, $1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

$\Rightarrow$ $z^* g_{(1,2)}$ ist Riem. Metrik, falls $1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 > 0$.

Aufgabe 3

31.Okt. 2019
Blatt 1

(M,g) PR-Mgf., $f: M \to \mathbb{R}$ glatt
$N := f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, nicht leer

- Berechne Koord. darst. von grad f in Karte (U,φ) von M
- grad $f(p) \neq 0$ $\forall p \in N$ $\Rightarrow$ N ist Umf. mit Kodim. 1
- grad $f(p)$ ist senkrecht auf T_pN
- Berechne grad u für 2. Fundamentalf. aus Aufgabe 2.

- Wie in Aufgabe 2: $\#$ ist die Umkehrung von $\flat: TM \to T^*M$, $X \mapsto g(X,\cdot)$

$$\Rightarrow \# \underset{\substack{\text{in lokalen}\\ \text{Koord}}}{\hat{=}} (g_{ij})^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{grad } f}} = \#(df) = \underline{\underline{(g_{ij})^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}}}$$

- grad $f(p)$ ist eind. festgel. als Lsg. von $df = g(\text{grad } f, \cdot)$
- Beachte grad $f(p) \neq 0 \Rightarrow df(p) \neq 0 \overset{\text{Vorr.}}{\Rightarrow} df(p) \neq 0$ $\forall p \in f^{-1}(c)$
  $\Rightarrow c$ regulärer Wert $\Rightarrow N$ Umfkt mit Dim. dim M - dim $\mathbb{R}$
  $\hat{=}$ Kodim 1

- Sei $v \in T_pN = \ker(df)$: $g_p(\text{grad } f(p), v) = df(v) = 0$
  $\rightarrow$ grad f senkrecht auf T_pN
- $du = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ grad $u = (g_{ij})^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\dfrac{1}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\begin{pmatrix}1+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\\ -\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}}}$

Auf. 4

(M,g) Riem. Mfkt. $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ minimierend, falls $L_g(\gamma) = d_g(\gamma(t_0), \gamma(t_1))$

ZZ: γ minimierend $\Rightarrow$ die Einschränkungen $\gamma|_{[t_0,t]}$ & $\gamma|_{[t,t_1]}$ sind minimierend

$d(\gamma(t_0), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t_1)) \leq$

$L(\gamma|_{[t_0,t]}) + L(\gamma|_{[t,t_1]}) = L(\gamma) = d_g(\gamma(t_0), \gamma(t_1))$

$\leq d(\gamma(t_0), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t_1))$

$\Rightarrow$ An allen Stellen gilt "="

$$\left.\begin{aligned} d(\gamma(t_0), \gamma(t)) &\leq L(\gamma|_{[t_0,t]}) \\ d(\gamma(t), \gamma(t_1)) &\leq L(\gamma|_{[t,t_1]}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma|_{..} \text{ ist minimierend.}$$