Aufgabe 2

(M,g) vollst. R-MfKt., $f: M \to \mathbb{R}$ glatt

$H(f)_p(v_1, v_2) = g_p(\nabla_{v_1} \operatorname{grad} f, v_2)$

(a) $\gamma: I \to M$ Geodätische

Berechne: $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)$ und $\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)$

Dazu $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) = (d_\gamma f)(\dot\gamma) = g_\gamma(\operatorname{grad} f, \dot\gamma)$

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma) = \frac{d}{dt}(g_\gamma(\operatorname{grad} f, \dot\gamma)) = g_\gamma(\nabla_{\dot\gamma} \operatorname{grad} f, \dot\gamma) + g_\gamma(\operatorname{grad} f, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)$$

$$= H(f)_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) + 0.$$

(b) $H(f)_p$ pos. def. für alle $p \in M$

z.z. $p_0, p_1 \in \operatorname{Krit}(f) \Rightarrow p_0 = p_1$

Beweis: Ann: $p_0 \neq p_1$. M vollst. & zsh. : Es ex. ~~[illegible]~~ eine Geodätische $\gamma: [t_0, t_1] \to M$ (nicht konstant) die p_0 und p_1 verbindet. Dann gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma) = H(f)_\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) > 0 \quad (\text{Da } \dot\gamma \neq 0)$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)$ ist monoton wachsend, aber

$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_i) = d_{p_i} f(\dot\gamma) = 0$ $\lightning$ (Mittelwertsatz)

c) f eigentlich, $f \geq c$ (von unten beschränkt)

z.z. f hat einen eindeutigen minimierenden Punkt p und $\operatorname{Krit}(f) = \{p\}$.

Beweis: **Existenz:** Es gibt eine Folge $\{p_i\}_i \subseteq M$ s.d. $f(p_i) \to \inf_M f \geq c > -\infty$

o.E. $f(p_i) \geq f(p_{i+1})$.

f eigentlich $\Rightarrow f^{-1}([c, f(p_1)])$ kompakt

Weiterhin $\{p_i\} \subseteq f^{-1}([c, f(p_1)]) \Rightarrow \{p_i\}$ hat eine konvergente Teilfolge (immer noch p_i genannt) mit $p_i \to p_\infty$

f stetig: $f(p_\infty) = \lim f(p_i) = \inf_M f \Rightarrow p_\infty$ ist min. Punkt

Eindeutigkeit: Nach b) gilt $|\operatorname{Krit} f| = 0, 1$.

Blatt 12

Aufgabe 1

$v_1, v_2 \in S^{n-1}$, $\vartheta_{12} \in [0, \pi]$ def. durch $\cos \vartheta_{12} = g_{\mathbb{R}^n}(v_1, v_2)$

(a) z.z.: $d_{g_{S^{n-1}}}(v_1, v_2) = \vartheta_{12}$

Beweis: 1. Fall: v_1, v_2 kolinear, $\cos \vartheta_{12} = g_{\mathbb{R}^n}(v_1, v_2) = \pm 1$

$$\Rightarrow \vartheta_{12} = \begin{cases} 0 & v_1 = v_2 \\ \pi & v_1 = -v_2 \end{cases} = d_{S^{n-1}}(v_1, v_2)$$

2. Fall: v_1, v_2 nicht kolinear. Dann ist die minimierende Geodätische eindeutig und verläuft durch den Schnitt der Ebene $\mathrm{span}(v_1, v_2)$ mit S^{n-1}.

Sei $w = v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1$

Die minimierende Geod. von v_1 nach v_2 ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \cos(|w| \cdot t) \cdot v_1 + \sin(|w| \cdot t) \cdot \frac{w}{|w|}.$$

Es gilt: $|w|^2 = \ldots = 1 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 = 1 - \cos \vartheta_{12}^2$

- $\gamma(0) = v_1$
- $\gamma(\vartheta_{12}/|w|) = \ldots = \langle v_1, v_2 \rangle v_1 + \sin(\vartheta_{12}) \cdot \frac{w}{|w|}$

$$\underset{\sin \vartheta_{12} \geq 0}{=} \langle v_1, v_2 \rangle v_1 + \sqrt{1 - \cos \vartheta_{12}^2} \cdot \frac{w}{|w|}$$

$$= \langle v_1, v_2 \rangle v_1 - w = v_2.$$

$$\int_0^{\vartheta_{12}/|w|} |-\sin(|w| \cdot t) \cdot |w| \cdot v_1 + \cos(|w| \cdot t) \cdot w| \, dt = \ldots$$

$$= \int_0^{\vartheta_{12}/|w|} |w| \, dt = \vartheta_{12} \leq \pi \quad \Rightarrow \gamma \text{ war minim. Geod.}$$

$d_{S^{n-1}}(v_1, v_2) = \vartheta_{12}$

b) $\vartheta_{13} = d_{S^{n-1}}(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) = \vartheta_{12} + \vartheta_{23}.$

Aufgabe 3

(M,g) PR-Mfkt., $V: M \to \mathbb{R}$ glatt

M_0, M_1 Untermannigfaltigkeiten von M

$S: \mathcal{C}_{M_0 M_1} \to \mathbb{R}$, $S(\gamma) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} g_\gamma(\dot\gamma,\dot\gamma) - V(\gamma)\right) dt$

$\gamma \in \mathcal{C}_{M_0M_1}$, $\Gamma: (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\to M$ Familie von Kurven, sodass

$\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_s \in \mathcal{C}_{M_0M_1}$ $\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

$X = X^\Gamma := \partial_s \Gamma|_{s=0}$

(a) Zz: $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(\gamma_s) = d_\gamma S\cdot X := -\int_0^1 (g_\gamma(X, \ddot\gamma + \operatorname{grad} V(\gamma))\, dt) + \sum_{j=1}^{k-1} g_\gamma(X(t_j), \Delta\dot\gamma(t_j))$

$+ g_{\gamma(1)}(X(1), X(1)) - g_{\gamma(0)}(X(0), X(0))$

Beweis: Wir betrachten $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_j,t_{j+1}]$. Dort gilt

$$\frac{d}{ds} S(\gamma_s) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g\left({}^\Gamma\nabla_{\partial_s}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(s,\cdot), \dot\Gamma(0,\cdot)\right) \cancel{d} - dV\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,\cdot)\right)dt$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} g\left({}^\Gamma\nabla_{\partial_t}\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,\cdot),\dot\gamma\right)dt - \int g_\gamma\left(\operatorname{grad}V, \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,\cdot)\right)dt$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} -g\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,\cdot), {}^\Gamma\nabla_{\partial_t}\dot\gamma\right) + \frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,\cdot),\dot\gamma\right) - g_\gamma\left(\operatorname{grad}V, \frac{\partial}{\partial s}\Gamma\right) dt$$

Hauptsatz Diff. & Int.rechnung

$$= -\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(X,\ddot\gamma) + g(\operatorname{grad}V, X)\,dt + g(X(t_{j+1}), \dot\gamma(t_{j+1}^-)) - g(X(t_j),\dot\gamma(t_j^+))$$

Summieren über alle j gibt die Behauptung.

(b) $\gamma\in\mathcal{C}_{M_0M_1}$ mit $S(\gamma)\le S(\delta)$ $\forall \delta\in\mathcal{C}_{M_0M_1}$.

Zz: $\ddot\gamma = -\operatorname{grad}V(\gamma)$,

$\dot\gamma \in (T_{\gamma(i)} M_i)^\perp$ für $i=0,1$.

Beweis: $S(\gamma)\le S(\delta)$ $\forall\delta \Rightarrow \gamma$ ist (glob.) Minimum

$\Rightarrow \gamma$ kritischer Punkt $\Rightarrow (d_\gamma S)X = 0$ f.a. $X = \partial_s\Gamma$.

Ann.: $\ddot\gamma \neq -\operatorname{grad}V(\gamma)$ dort wo γ diff'bar

Sei $\hat t \neq t_0,\dots,t_k$. Wir betrachten ~~das~~ einen Vektor~~feld~~ v mit

$g_{\gamma(\hat t)}(v, \ddot\gamma + \operatorname{grad}V(\gamma)(\hat t)) > 0$

Erweitere v zu einem Vektorfeld $v(t)$ auf $[0,1]$.

Sei $\rho: [0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abschneidefkt. auf $[0,1]$ mit

$\hat t \in \operatorname{supp}\rho \subseteq (t_j, t_{j+1})$, $\rho(\hat t) = 1$

Dann gilt

$$0 = (d_\gamma S)(\varrho v(t)) = -\int_0^1 g_\gamma(\underbrace{\varrho \cdot v}_{>0}, \overbrace{\ddot{\gamma} + \operatorname{grad} V}^{\neq 0})\,dt \neq 0$$

$\Rightarrow \quad \ddot{\gamma} + \operatorname{grad} V(\gamma) = 0$ auf $[0,1] \setminus \{t_0, \dots, t_k\}$.

Sei $j \in \{1, \dots, k-1\}$: Wähle X s.d. $\cdot\ X(t_i) = 0 \quad i \neq j$

(falls $\Delta\dot{\gamma}(t_j) \neq 0$): $\quad \cdot\ g_\gamma(X(t_j), \Delta\dot{\gamma}(t_j)) > 0$

$\Rightarrow \quad 0 = g(X(t_j), \Delta\dot{\gamma}(t_j)) \Rightarrow \Delta\dot{\gamma}(t_j) = 0$

$\Rightarrow \gamma|_{(0,1)}$ glatt. $\Rightarrow \quad \ddot{\gamma} = -\operatorname{grad} V(\gamma)$ auf $(0,1)$

Sei nun X ein Vektorfeld mit $X(0) = v \in T_{\gamma(0)} M_0$, $X(1) = 0$

$\Rightarrow \quad g(v, \dot{\gamma}(0)) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma}(0) \perp T_{\gamma(0)} M_0$

Für $\gamma(1)$ analog.