Blatt 11

Aufgabe 1

M kompakte, orientierte Fläche mit Rand

$M_1, M_2 \subset M$ kompakte Subflächen mit Rand, sodass

- $M = M_1 \cup M_2$, • $M_1 \cap M_2$ ist Vereinigung von Zsh.komp. von ∂M_1
- $M_1 \cap \partial M$ & $M_2 \cap \partial M$ sind Vereinigung von Zsh komp von ∂M

z.z. $\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2)$

Beweis: Laut Hinweis gibt es eine Triangulierung von M_1 und M_2 mit den gleichen Kanten und Ecken auf $\partial M_1 \cap \partial M_2$.

Die Vereinigung dieser Triang. ist eine Triang. von M.

Es folgt

$$\chi(M_1) + \chi(M_2) = |F_1| - |K_1| + |E_1| + |F_2| - |K_2| + |E_2|$$
$$= |F| - |K| + |E| + |K_{\partial M_1 \cap \partial M_2}| - |E_{\partial M_1 \cap \partial M_2}|$$
$$= \chi(M) + |K_{\partial M_1 \cap \partial M_2}| - |E_{\partial M_1 \cap \partial M_2}|$$

Bei der zweiten Gleichheit werde bemerkt, dass der Schnitt von M_1 und M_2 genau der Schnitt der Ränder ∂M_1 und ∂M_2 ist. Das heißt auf der linken Seite werden die Kanten und Ecken in $\partial M_1 \cap \partial M_2$ doppelt gezählt.

Der Schnitt der Ränder ist eine disjunkte Vereinigung von S^1-en. und die Einschränkung der Triangulierung gibt eine Zerlegung von S^1 in Kantenen und Ecken. Für eine solche Zerlegung ist die Anzahl der Kanten gleich der Anzahl der Ecken. ∎

Es gilt $\chi(D^2) = 1$

Beh.: $\chi(S^2) = 2$, $\chi([0,1] \times S^1) = 0$, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$,

$\chi(\mathbb{T}^2 \setminus D^2) = -1$, $\chi(M_g) = 2 - 2g$

Beweis: Wir wählen Zerlegungen wie oben beschrieben:

$S^2 = D^2 \cup D^2 \Rightarrow \chi(S^2) = \chi(D^2) + \chi(D^2) = 2$

$D^2 \cong D^2 \cup ([0,1] \times S^1) \Rightarrow \chi(D^2) = \chi(D^2) + \chi([0,1] \times S^1) \Rightarrow \chi([0,1] \times S^1) = 0$

$\mathbb{T}^2 = ([0,1] \times S^1) \cup ([0,1] \times S^1) \Rightarrow \chi(\mathbb{T}^2) = 2 \cdot \chi([0,1] \times S^1) = 0$

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \setminus D^2 \cup D^2 \Rightarrow \chi(\mathbb{T}^2) = \chi(\mathbb{T}^2 \setminus D^2) + \chi(D^2) \Rightarrow \chi(\mathbb{T}^2 \setminus D^2) = -1$

Es gilt: $M_1 = \mathbb{T}^2 \quad 0 = \chi(\mathbb{T}^2) = 2 - 2 \cdot 1.$

und $M_g = M_{g-1} \setminus D^2 \cup \mathbb{T}^2 \setminus D^2$

Also $$\chi(M_g) = \chi(M_{g-1} \setminus D^2) + \chi(\mathbb{T}^2 \setminus D^2)$$
$$= \chi(M_{g-1}) - \chi(D^2) + \chi(\mathbb{T}^2 \setminus D^2)$$
$$= \chi(M_{g-1}) - 2$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion nach g.

Aufgabe 2

M Fläche mit neg. Gauß-Krümmung, $M \cong \mathbb{R}^2$

zz: • Für $m \leq 2$ ex. kein m-Eck mit stückweise geodätischem Rand

• Es gibt kein 3-Eck mit - einer konkaven Ecke

und - stückweise geod. Rand.

Beweis: • Angenommen es gibt so ein m-Eck Δ. Dann sagt der Satz von Gauß-Bonnet:

$$\int_\Delta K \, dA + \int_{\partial\Delta} k_g \, ds + \sum AW(\partial\Delta) = 2\pi \chi(M)$$

Es gilt • $\int_\Delta K \, dA < 0$, da $K<0$

• $\int_{\partial\Delta} k_g \, ds = 0$, geodätischer Rand

• $\sum AW(\partial W) < m \cdot \pi \leq 2\pi$, da $AW \in (-\pi, \pi)$

• $\chi(M) = 1$

Das ist ein Widerspruch.

Für den Fall des 3-Ecks gelten dieselben Formeln, außer der Dritten. Diese wird zu

$$\begin{aligned}\sum AW(\partial W) &= \sum AW_{konkav}(\partial W) + \sum AW_{konvex} \quad , \text{ konvexe } AW \in (-\pi, 0) \\ &< \sum AW_{konvex} \qquad \text{mind. ein konv. } AW \\ &< 2 \cdot \pi\end{aligned}$$

zz: Jede maximale nicht-konst Geod. ist injektiv.

Beweis: Ann.: Es gibt eine nicht inj nicht-konst Geod. $\check{\gamma}$

Dann gibt es $t_0 < t_1$ s.d. $\check{\gamma}(t_0) = \check{\gamma}(t_1)$ o.E. ist t_1 der kleinste Wert $> t_0$ mit dieser Eigenschaft.

Betrachte nun $\gamma := \check{\gamma}|_{[t_0, t_1]} : [t_0, t_1] \to M$.

Falls γ injektiv außer auf dem Rand ist berandet es nach dem Kurvensatz ein m-Eck. $\gamma|_{(t_0,t_1)}$ glatt $\Rightarrow$ $m \leq 1$. $\lightning$ 1. Teil der Aufgabe

Falls $\gamma|_{(t_0,t_1)}$ nicht injektiv ist gibt es $t_0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = t_1$, $k \geq 2$ Zeiten zu denen γ einen Doppelpunkt besitzt, d.h.

$$t \neq s_0, \ldots, s_k \Rightarrow \gamma^{-1}(\gamma(t)) = \{t\}$$

Wir führen eine Induktion über k

Wir haben schon gesehen, dass $k=1$ nicht möglich ist.

Für $k \geq 2$ gilt $\gamma(s_k) = \gamma(s_1)$, aber $t_1 > s_1$ war minimal mit

dieser Eigenschaft

oder Es gibt $2 \leq j \leq k$ mit $\gamma(s_j) = \gamma(s_1)$

Sei nun $\delta := \gamma|_{[s_1, s_j]}$, diese Kurve besitzt maximal $k-1$

Zeiten zu denen Doppelpunkte auftreten, nämlich

$$s_1 < s_2 < \dots < s_j \leq s_k$$

Induktion $\Rightarrow$ Eine solche Kurve gibt es nicht

$\Rightarrow \gamma$ ist injektiv.

Aufgabe 3

(M,g) n-dim. zsh. PR-MFkt., $Kil(M,g)$ VR der Killing vf.

Zz: $\forall X \in Kil(M,g)$ und alle Geodätische $\gamma : [0,1] \to M$ ist $X \circ \gamma$ ein Jacobi-Vektorfeld entlang γ

Beweis: Da X Killing ist auch $\Phi_X^t \circ \gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische, wobei Φ_X^t den Fluss zum Vektorfeld X bezeichnet. Also ist $\Psi_s^t = (\Phi_X^t \circ \gamma)(s)$ eine Variation von γ durch Geodätische. Es gilt $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi_s^t = X(\gamma(s))$. Nach Def ist X also ein Jacobi Vf.

Zz: Für $p \in M$ ist $\mathcal{F}: Kil(M,g) \to T_pM \oplus \Lambda^2(T^*M)$ injektiv.

$$X \mapsto (X(p), g_p(\nabla_\cdot X, \cdot))$$

Bew: $\mathcal{F}$ ist linear in X. Sei also $\mathcal{F}(X) = 0$

$\Rightarrow X(p) = 0$ (erste Koordinate)

Bem: Es gilt auch $(\nabla_Y X)_p = 0$ für alle Y

Denn: $0 = g_p(\nabla_Y X, Z)$ für alle Z (zweite Koord.)

g_p nicht deg $\Rightarrow (\nabla_Y X)_p = 0$

Sei $r > 0$ hinreichend klein sodass: $\forall q \in B_r(p)$: $\exists$ längenminimierende Geodätische γ_{pq} von p nach q. Nach der obigen Beobachtung ist X ein Jacobivf. entlang γ_{pq}, $X(q)$ ist also durch $X(p)$ und $(\nabla_{\dot\gamma_{pq}} X)(p)$ eindeutig festgelegt.

$\Rightarrow X(q) = 0 \quad \forall q \in B_r(p)$

Wir betrachten nun $\{q \in M \mid X(q) = 0,\ \nabla_Y X(q) = 0\}$

Diese Menge ist abgeschlossen und nach dem obigen Argument auch offen. Da p in der Menge enthalten ist, ist sie nicht leer.

Also gilt $X \equiv 0$ auf $M \Rightarrow \mathcal{F}$ injektiv.

Zz: $\dim Kil(M,g) \leq n \cdot (n+1)/2$

Bew: Der Bildraum von $\mathcal{F}$ hat Dimension $n + \binom{n}{2} = n \cdot (n+1)/2$

$\mathcal{F}$ inj. $\Rightarrow \dim Kil(M,g) \leq n \cdot (n+1)/2$

Aufgabe 4

(M,g) Riem. Mfkt. mit konst. Krümmung $c \in \mathbb{R}$

$\gamma: [0,T] \to M$ nach Bogenlänge param. Geodätische

z.z.: J ist normales Jacobi-Vektorfeld entlang γ

$\iff \ddot{J} + cJ = 0, \quad J(0), \dot{J}(0) \perp \dot{\gamma}(0).$

Beweis: Nach Satz 6.10 impliziert konst. Schnittkrümmung

$$R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = c \cdot (g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) \cdot J - g(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma})$$
$$= c \cdot (J - g(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma})$$

„$\Rightarrow$" Für J normales Jacobi Vektorfeld gilt $g(J,\dot{\gamma}) = 0$ und
$$\ddot{J} + R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

Zusammen $0 = \ddot{J} + R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = \ddot{J} + c \cdot J.$

Außerdem $0 = \frac{d}{dt} g(J,\dot{\gamma}) = g(\dot{J},\dot{\gamma})$ insb. $\dot{J}(0) \perp \dot{\gamma}(0)$

„$\Leftarrow$" Wir betrachten $f(t) = g(J,\dot{\gamma})$

$\rightsquigarrow \dot{f}(t) = g(\dot{J},\dot{\gamma})$

$\ddot{f} = g(\ddot{J},\dot{\gamma}) = -c\,g(J,\dot{\gamma}) = -c \cdot f$

$f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

$\Rightarrow \quad R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = c \cdot J = -\ddot{J}$

$\Rightarrow \quad J$ normales Jacobi Vektorfeld.

z.z.: J mit $J(0) = 0$ erfüllt diese Gleichung g.d.w. $J(t) = sn_c(t) \cdot e(t)$

Beweis: „$\Leftarrow$" $J(t) = sn_c(t)\, e(t)$

$\Rightarrow \dot{J}(t) = \dot{sn}_c(t) \cdot e(t)$

$\ddot{J}(t) = \ddot{sn}_c(t) \cdot e(t) = -c \cdot sn_c(t)\, e(t) = -c \cdot J(t)$

Außerdem $J(0) = sn_c(0) \cdot e(t) = 0$ und $\dot{J}(t) =$

„$\Rightarrow$" $\dot{J}(0) \perp \dot{\gamma}$, setze $e(0) = \dot{J}(0)$, dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $e(t)$ mit $e(0) = \dot{J}(0)$. Dann erfüllt $sn_c(t) \cdot e(t) = X(t)$ die Gleichung $\ddot{X} + c \cdot X = 0$ sowie $X(0) = 0, \ \dot{X}(0) = \dot{J}(0)$

Eindeutigkeit von Lösungen $\Rightarrow J = X = sn_c \cdot e.$