Blatt 10

Aufgabe 1

(M^n, g) Riem. Mfkt, $p \in M$

(a) Z.z.: (M,g) mit konst. Schnittkr. K in p

$\Rightarrow \mathrm{Ric}_p = K \cdot (n-1) \cdot g_p$, $\mathrm{skal}(p) = K \cdot n \cdot (n-1)$

Beweis: Nach Satz 6.29: $\mathrm{Ric}_p(X, Y) = \sum_i R_p(e_i, X, Y, e_i)$

Konst. Schnittkr bedeutet: $K(\Pi) = \dfrac{R(X,Y,Y,X)}{g \owedge g(X,Y,Y,X)} = K(p)$

Damit $\mathrm{Ric}_p\left(\frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|}\right) = \sum_i K(p) \cdot g \owedge g\left(e_i, \frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|}, e_i\right)$

Sei nun $e_1, \dots, e_n$ eine ONB mit $e_1 = X/|X|$

$\underset{\uparrow}{=} K \cdot (n-1)$

n Summand, wobei $g \owedge g(e_i, X/|X|, X/|X|, e_i) = (1 - \delta_{1i})$

$\Rightarrow \mathrm{Ric}_p(X, X) = K \cdot (n-1) \cdot g_p(X, X)$

Die Symmetrie des Riccitensors und der Metrik impliziert die Behauptung.

Sei $e_1, \dots, e_n$ bel. ONB. Nach Satz 6.33: $\mathrm{skal}(p) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i)$

$\Rightarrow \mathrm{skal}(p) = \sum_{i \neq j} K(p)\, g \owedge g(e_i, e_j, e_j, e_i)$

$= K(p) \cdot n \cdot (n-1)$

(b) Beh: $n = 2$, die Skalarkr. bestimmt den Krümmungstensor.

Beweis: Nach Vorl. (Bem. 6.11) gilt für $n = 2$:

$R_p(X,Y)Z = K(p) \cdot (g_p(Y,Z)X - g_p(X,Z)Y)$

$\ulcorner$ $n=2 \Rightarrow$ konst. Schnittkr in p $\lrcorner$ $= \dfrac{\mathrm{skal}(p)}{2} \cdot (g_p(Y,Z)X - g_p(X,Z)Y)$

(c) Für $n=3$ bestimmt Ric_p den Krümmungstensor $R_p \in (T_p^* M)^{\otimes 4}$

Beweis: Es gilt:

$$Ric(e_2,e_3) = R(e_1,e_2,e_3,e_1) + R(e_2,e_2,e_3,e_2) + R(e_3,e_2,e_3,e_3)$$
$$= R(e_1,e_2,e_3,e_1)$$

Analog für $Ric(e_1,e_2)$, $Ric(e_1,e_3)$.

Mit den Symmetriebeziehungen aus Satz 6.2. sind alle Krümmungen mit genau drei verschiedenen Argumenten bestimmt durch die Ricci Krümmung

$$Ric(e_1,e_1) = R(e_2,e_1,e_1,e_2) + R(e_3,e_1,e_1,e_3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Ric(e_1,e_1) \\ Ric(e_2,e_2) \\ Ric(e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R(e_2,e_3,e_3,e_2) \\ R(e_1,e_3,e_3,e_1) \\ R(e_1,e_2,e_2,e_1) \end{pmatrix}$$

Da diese Matrix invertierbar ist lassen sich auch die Krümmungen der Form $R(e_i,e_j,e_j,e_i)$ aus den Ricci Krümmungen berechnen.

Aufgabe 2

(M^n, g) Riem. Mft, $x: U \to V$ Normalkoord. um $p \in M$

$U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $g^p := (x^{-1})^* g$, $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$

Wir sehen: Für $\mathrm{skal}(p) > 0 / < 0$ ist das Volumen des g-Balls kleiner / größer als das des eukl. mit gleichem Radius für r klein genug.

(a) zz: $\sqrt{\det g^p(x)} = 1 - \sum_{i,j} \frac{1}{6} Ric_{ij}(p) x^i x^j + o(|x|^2_{g_{\mathbb{R}^n}})$

Beweis: Nach Formel (6.12):

$$g_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{3} \sum_{i,l} R_{ijkl}(p)\, x^i x^l + o(|x|^2)$$

Mit der Leibnizformel für die Determinante

$$\det g_{jl} = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \prod_{j=1}^n g_{j\tau(j)}$$

$$= \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{3} \sum_{i,l} R_{ijjl}(p)\, x^i x^l + o(|x|^2)\right) + \underbrace{\sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau \neq id}} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{j=1}^n g_{j\tau(j)}}$$

Für jeden Summanden enthält das Produkt mind. zwei Faktoren ohne konst. Anteil

$$= 1 - \frac{1}{3} \sum_j \left(\sum_{i,l} R_{ijjl}(p) x^i x^l + o(|x|^2)\right) + o(|x|^4) + o(|x|^4)$$

Produkt mit n 1en   Produkt mit $(n-1)$ 1en   Prod. mit weniger als $(n-1)$ 1en   Rest. Summanden

$$= 1 - \frac{1}{3} \sum_{i,l} Ric(e_i, e_l) x^i x^l + o(|x|^2)$$

Mit der Taylorentwicklung für die Wurzel $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ folgt:

$$\sqrt{\det g_{il}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \sum_{i,l} Ric(e_i, e_l) x^i x^l + o(|x|^2)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3} \sum_{i,l} \ldots\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \sum_{i,l} Ric(e_i, e_l) x^i x^l + o(|x|^2) + o(|x|^3)$$

b) Zz: $\mathrm{vol}_{g^p}(B_r^n) = \int_{B_r^n} \left(1 - \sum_{i,j} \frac{1}{6} Ric_{ij}(p)\, x^i x^j + o(|x|^2)\right) \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}$

$$= \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j} \left(Ric_{ij}(p)\, x^i x^j\right) \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} + o(r^{n+2})$$

<u>Beweis:</u> $\mathrm{vol}_{g^p}(B_r^n) = \int_{B_r^n} \sqrt{\det g^p}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$$\overset{(a)}{=} \int_{B_r^n} 1 - \sum_{i,j} \frac{1}{6} Ric_{ij}(p)\, x^i x^j + o(|x|^2) \quad \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}$$

$\ulcorner \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n} = \rho^{n-1} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}} \wedge \mathrm{vol}_{S^{n-1}}$ $= \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) - \frac{1}{6} \int_{(0,r)\times S^{n-1}} Ric_{ij}(p)\, \rho^2 x^i x^j\, \rho^{n-1}\, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}} \wedge \mathrm{vol}_{S^{n-1}}$

$$+ \int_{(0,r)\times S^{n-1}} o(|\rho \cdot p|^2) \cdot \rho^{n-1}\, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}} \wedge \mathrm{vol}_{S^{n-1}}$$

$\ulcorner$Fubini$\lrcorner$ $= \mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^n}}(B_r^n) - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \int_{S^{n-1}} Ric_{ij}(p)\, x^i x^j\, \mathrm{vol}_{S^{n-1}} + o(r^{n+2})$

c) Sei $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g_{\mathbb{R}^n}(A\cdot x, x) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j$

Zz: $\int_{S^{n-1}} Q\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = \frac{\mathrm{Spur}\, A}{n} \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1})$

<u>Beweis:</u> Für die Isometrie $I_i: S^{n-1} \to S^{n-1}$, $I_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

gilt:
- $I_i^* \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = -\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}$
- I_i ist orientierungsumkehrend

Also,

$${}^{\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} x^i x^j\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = {}^{-\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} I^*\left((x_i x_j)\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}\right)$$

$$= {}^{-\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} -x_i x_j \cdot \left(-\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}\right)$$

$$= -{}^{\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} x_i x_j\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}$$

$\Rightarrow {}^{\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} x^i x^j\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = 0$

Für die Isometrie $J_{ij}: S^{n-1} \to S^{n-1}$, $J(x) = (\dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots)$

gilt:
- J_{ij} ist orientierungsumkehrend
- $J_{ij}^* \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = -\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}$

Also,

$${}^{\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} (x_j)^2\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}} = {}^{-\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} J^*\left((x_j)^2\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}\right)$$

$$= {}^{-\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} x_i^2 \cdot \left(-\mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}\right)$$

$$= {}^{\circ}\!\!\int_{S^{n-1}} x_i^2\, \mathrm{vol}_{g_{S^{n-1}}}$$

Es folgt:

$$\int_{S^{n-1}} Q \; vol_{g_{S^{n-1}}} = \sum_{ij} A_{ij} \int_{S^{n-1}} x^i x^j \; vol_{g_{S^{n-1}}}$$

$$= \sum_i A_{ii} \int_{S^{n-1}} (x^i)^2 \, vol_{g_{S^{n-1}}} + \sum_{i \neq j} A_{ij} \int_{S^{n-1}} x^i x^j \, vol_{g_{S^{n-1}}}$$

$$= \left(\sum_i A_{ii}\right) \cdot \int_{S^{n-1}} (x^1)^2 vol_{g_{S^{n-1}}} + 0$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{Spur(A)}{n} \cdot Vol_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1})$$

ad $(*)$: $$Vol_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} vol_{g_{S^{n-1}}} = \int_{S^{n-1}} \underbrace{\sum_j (x^j)^2}_{=1} vol_{g_{S^{n-1}}}$$

$$= \sum_j \int_{S^{n-1}} (x^1)^2 \, vol_{g_{S^{n-1}}}$$
$$= n \cdot \int_{S^{n-1}} (x^1)^2 \, vol_{g_{S^{n-1}}}$$

Insbesondere für $A_{ij} = R_{ij}$ ergibt sich

$$\int_{S^{n-1}} \sum_{ij} R_{ij} \, x^i x^j \, vol_{g_{S^{n-1}}} = \frac{Skal(p)}{n} \cdot Vol(S^{n-1})$$

Zusammensetzen von (b) & (c) ergibt die Formel vom Anfang der Aufgabe.

Aufgabe 3

$(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ Riem. Mft.

$(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ deren Produkt

∇^i Levi-Civita Ableitung von g_i, ∇ die von $g_1 \oplus g_2$

$X \in \mathfrak{X}(M_i)$ dann bezeichnet $X^h \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ die horizontale Hochhebung

z.z.:

$$\nabla_{X^h} Y^h = \begin{cases} (\nabla^1_X Y)^h & \text{falls } X \in \mathfrak{X}(M_1), Y \in \mathfrak{X}(M_1) \\ 0 & X \in \mathfrak{X}(M_1), Y \in \mathfrak{X}(M_2) \\ 0 & X \in \mathfrak{X}(M_2), Y \in \mathfrak{X}(M_1) \\ (\nabla^2_X Y)^h & X \in \mathfrak{X}(M_2), Y \in \mathfrak{X}(M_2) \end{cases}$$

Beweis: 1. $X, Y \in \mathfrak{X}(M_1)$

Aus Aufgabe 7-2: $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ ist Riem. Submersion

$$\nabla_{X^h} Y^h = (\nabla^1_X Y)^h + 1/2\, [X^h, Y^h]^v$$

$$= (\nabla^1_X Y)^h + 1/2 \cdot (0 \oplus T\pi_2\, [X^h, Y^h])$$

$$= (\nabla^1_X Y)^h$$

2. $X \in \mathfrak{X}(M_1)$, $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$

$$2g(\nabla_{X^h} Y^h, Z) = \mathcal{L}_{X^h}(g(Y^h, Z)) + \mathcal{L}_{Y^h}(g(X^h, Z)) - \mathcal{L}_Z(g(X^h, Y^h))$$
$$g([X^h, Y^h], Z) - g([Y^h, Z], X^h) - g([X^h, Z], Y^h)$$

2.1. $Z = Z_1^h$ für $Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$

$$= 0 \quad + \mathcal{L}_{Y^h}((g_1)_{\pi_1}(X, Z_1)) - 0$$
$$+ g(0, Z) - g(0, X^h) - g([X^h, Z_1^h], Y^h)$$
$$= 0 + 0 - 0 - g(\underset{\mathfrak{X}(M_1)^h}{s.t.\,in}, Y^h) = 0$$

2.2. $Z = Z_2^h$ für $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$

$$= \mathcal{L}_{X^h}(g_{2 \cdot \pi_2}(Y, Z_2)) + 0 - 0$$
$$+ g(0, Z) - g([Y^h, Z_2^h], X^h) - g(0, Y^h)$$
$$= 0$$

$\to$ $2g(\nabla_{X^h} Y^h, Z) = 0 \quad \forall Z \to \nabla_{X^h} Y^h = 0$

3. $X \in \mathfrak{X}(M_2)$, $Y \in \mathfrak{X}(M_1)$ analog zu 2.

4. $X, Y \in \mathfrak{X}(M_2)$ analog zu 1.

zz: $R(X,Y)Z = 0$, falls zwei Argumente Hochhebungen aus verschiedenen Basisräumen sind.

Beweis: $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (*)$

1. Z bel. $X \in \mathfrak{X}(M_1)^*$, $Y \in \mathfrak{X}(M_2)^* \Rightarrow [X^h, Y^h] = 0$

Schreibe $Z = Z_1^h + Z_2^h$ mit $Z_i \in \mathfrak{X}(M_i)^*$

$(*) = \nabla_{X^h}(\nabla_Y Z_2)^h - \nabla_{Y^h}(\nabla_X^1 Z_1)^h$

$= 0 - 0$

Anti-Sym. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z \Rightarrow$ Auch für $X \in \mathfrak{X}(M_2)$, $Y \in \mathfrak{X}(M_1)$.

2. Y bel., $X \in \mathfrak{X}(M_1)$, $Z \in \mathfrak{X}(M_2)$

$(*) = \nabla_{X^h}(\nabla_{Y_1^h} + \nabla_{Y_2^h})Z^h - \nabla_Y \underbrace{\nabla_{X^h} Z^h}_{=0} + \underbrace{\nabla_{[X,Y_1]} Z}_{=0}$

$= \nabla_{X^h}(\nabla_{Y_2} Z)^h$

$= 0$

$X \in \mathfrak{X}(M_2)$, $Z \in \mathfrak{X}(M_1)$ analog

3. X bel. folgt aus 2. & Antisymmetrie.

zz: Für $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2$ $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ gilt

$$R(u,v,v,u) = R_1(u_1, v_1, v_1, u_1) + R_2(u_2, v_2, v_2, u_2)$$

Beweis: $R(u,v,v,u) = \sum_{i,j,k,l} R(u_i, v_j, v_k, u_l)$

$= \sum_{i,j,k,l} g(R(u_i, v_j)v_k, u_l)$

$= \sum_{i,l} g(R(u_i, v_i)v_i, u_l)$

$= \sum_i g_i(R(u_i, v_i)v_i, u_i)$

$= R_1(u_1, v_1, v_1, u_1) + R_2(u_2, v_2, v_2, u_2)$

(a) $K(\Pi) = \dfrac{R(X^h, Y^h, Y^h, X^h)}{g \otimes g(X^h, Y^h)} = \dfrac{R_1(X,0,0,X) + R_2(0,Y,Y,0)}{g \otimes g(X^h, Y^h)} = 0$

(b) $K(\Pi) \cdot g \otimes g(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = R_1(X_1, Y_1, Y_1, X_1) + R_2(X_2, Y_2, Y_2, X_2)$

$= K_1(\Pi_1) \cdot \underbrace{g_1 \otimes g_1(X_1, Y_1)}_{\geq 0} + K_2(\Pi_2) \underbrace{g_2 \otimes g_2(X_2, Y_2)}_{\geq 0}$ ≥ 0, falls $K_1, K_2 \geq 0$

≤ 0, falls $K_1, K_2 \leq 0$

Aufgabe 4

$M = I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $g = d\vartheta^2 + r^2(\vartheta,\phi)\, d\phi^2$, $r: M \to (0,\infty)$ glatt

z.z. $K = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2}$

Beweis: Nach Vorlesung: $K \cdot vol_g = - d\omega_1^2$, wobei

$$\omega_1^2 = g(\nabla e_1, e_2) = g(\nabla \partial_\vartheta, \tfrac{1}{r}\partial_\phi)$$
$$= r\, d\phi(\nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\vartheta)\, d\vartheta + \left(\tfrac{1}{r}\, g(\nabla_{\partial_\phi}\partial_\vartheta, \partial_\phi) + \left(-\tfrac{1}{r^2}\right) dr \cdot g(\partial_\vartheta, \partial_\phi)\right) d\phi$$

Beh. 1: $\nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\vartheta = 0$

$$g(\nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\vartheta, \partial_\vartheta) = \tfrac{1}{2}\partial_\vartheta(g(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta)) = 0$$
$$g(\nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\vartheta, \partial_\phi) = \partial_\vartheta g(\partial_\vartheta, \partial_\phi) - g(\partial_\vartheta, \nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\phi)$$
$$= -g(\partial_\vartheta, \nabla_{\partial_\phi}\partial_\vartheta) + g(\partial_\vartheta, [\partial_\vartheta, \partial_\phi])$$
$$= -\partial_\phi g(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta) = 0$$

$\Rightarrow$ Beh. 1.

$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{1}{r}\, g(\nabla_{\partial_\phi}\partial_\vartheta, \partial_\phi) \cdot d\phi$

Beh 2: $g(\nabla_{\partial_\phi}\partial_\vartheta, \partial_\phi) = r\, \partial r/\partial\vartheta$

$$g(\nabla_{\partial_\phi}\partial_\vartheta, \partial_\phi) = \cancel{\partial_\phi(g(\partial_\vartheta, \partial_\phi)) - g(\partial_\vartheta, \nabla_{\partial_\phi}\partial_\phi)}$$
$$= g(\nabla_{\partial_\vartheta}\partial_\phi, \partial_\phi) + g([\partial_\phi, \partial_\vartheta], \partial_\phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\partial_\vartheta(g(\partial_\phi, \partial_\phi)) = \tfrac{1}{2}\partial_\vartheta(r^2) = \tfrac{1}{2} 2r\, \partial r/\partial\vartheta$$

$\Rightarrow \omega_1^2 = \partial r/\partial\vartheta\, d\phi$

$\Rightarrow K r\, d\vartheta \wedge d\phi = -d(\partial r/\partial\vartheta\, d\phi) = -\partial^2 r/\partial\vartheta^2\, d\vartheta \wedge d\phi$

$\Rightarrow K = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\vartheta^2}$

Für $r(\vartheta,\phi) = \cos(\vartheta) + 2$ wird die gegebene Menge parametrisiert

Es folgt

$$K = \frac{\cos(\vartheta)}{\cos(\vartheta)+2} \cdot \begin{cases} < 0 & \vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2) \\ = 0 & \vartheta \in \{\pi/2, 3\pi/2\} \\ > 0 & \vartheta \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$