KLASSISCHE PROJEKTIVE GEOMETRIE - SS 2018

Notation

Ziel dieses Seminars ist, projektive Geometrie und Quadriken zu studieren mit den klassischen geometrischen und axiomatischen Methoden.

TEIL I: projektive Räume

1 - Projektive Räume: Axiomen (Nilab Abbas). Definieren Sie eine Inzidenzstruktur ([BR98, p. 5]) und geben Sie die Axiomen von Projektive Räume [BR98, Sec.1.2], definieren Sie einen projektiven Raum und eine projektive Ebene. Definieren Sie die duale Geometrie ([BR98, p. 8]). Definieren Sie die Fano Ebene ([BR98, Kap. 1,Üb. 4] oder [KV15, Beispiel 2.23]) und zeigen Sie dass sieeine projektive Ebene ist.

2 - Projektive Räume über K: Definitionen(Marvin Rolf Sigmund Mödinger). Definieren Sie $\mathbb{P}(V)$, für V einen Vektorraum über einen Schiefkörper K als Inzidenzstruktur(([BR98, p. 56,Def.] oder [BR04, p. 54,Def.]) und als Quotient ([KÖ9, p. 6,Def.]) und zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum ist. Definieren Sie, und die Unterräume und aufgespannten Unterräumen eines projektiven Raums([BR98, Sec. 1.3]). Definieren Sie, Unterräume erzeugte von eine Menge. Definieren Sie die Dimension von $\mathbb{P}(V)$ und zeigen Sie die Dimensionsformeln für $\mathbb{P}(V)$ ([KÖ9, p. 7,Folg.]). Zeigen Sie, warum in eine affine Raum gilt es nur als Vergleich gilt.

3 - Doppelverhältnis. Definieren Sie eine Menge von Punkte in allgemeine Position, definieren Sie affine Koordinaten eines projektives Raums. Definieren Sie das Doppelverhältnis und geben Sie die wichtigsten Eigenschaften.

4 - Fundamentalen Sätze der projetive Geometrie: projektive Abbildungen(Tim Holzschuh). Definieren Sie projektive Abbildungen ([Fis85, Sec. 3.2.1, Def.]) und Zentralprojektionen. Zeigen Sie, dass jede projektive Abbildung ist eine Komposition mehrerer prespektiven Abbildungen. Sie finden alle Definitionen und Sätzen in [Fis85, Sec. 3.2.9].

TEIL II: die projektive Ebene

5+6 - Die Sätze von Pappus und Desargues (Sebastian Groß). Zeigen Sie [BR98, Thm.2.2.1]. Geben Sie ein Gegenbeispiel von einen projektive Ebene, in dem Pappus Satz nicht gilt. Zeigen Sie [BR98, Thm.2.2.2], und erklären Sie warum, für $\mathbb{P}(V)$, der Satz von Pappus starker als der Satz von Desargues ist. Zitieren Sie [BR98, Thm.2.2.3], ohne Beweis. Wenn es noch Zeit gibt, geben Sie einen Beispiel von eine projektive Ebene in dem Desargues gilt aber Pappus nicht.

7 - Quadriken. Definieren Sie eine quadratische Menge in allgemeine Projektive Räumen ([BR04, Sek. 4.1,Def.]). Wir interessieren uns für solche Menge nur in $\mathbb{P}(V)$: Definieren Sie Quadriken ([BR98][Sec. 4.7]) und zeigen Sie, dass Sie eine quadratike Menge sind ([BR04, Lemma 4.7.1] ohne Beweis, [BR04, pp. 4.7.2-4.7.3]). Zeigen Sie, dass die Eigenschaft eine Quadrik zu sein, invariant unten Projektive Abbildungen ist. Sei jetzt $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2(K)$ eine Projektive Ebene (d.h. $dimV = 3$): zeigen Sie, dass zwischen 5 Punkte in allgemeine Position geht nur ein Quadrik zu (Hinweis: mit einer projektive Abbildung die 5 Punkte können besonders schön angenommen werden). Sei V das Vektorraum von Homogene Polynomen in Variabeln x, y, z und Grad 3. Zeigen Sie, dass jede Punkt von $\mathbb{P}(V)$ definiert eine Quadrik in $\mathbb{P}^2(K)$. Welche verschiedene Punkte definieren die selbe Quadrik?

8 - Die Resultante und der Satz von Bezout (schwache Form)(Lukas Heger). Definieren sie die Resultante zwei homogene polynomen in $K[x, y, z]$ und bewiesen Sie der Satz von Bezout (schwache Form) [Kir92, Sec.3.1] oder [KÏ4, Sec. 4.1]. Wir brauchen hier die Definition von Kurven in $\mathbb{P}^2(K)$, bitte merken Sie die Bemerkung [KÏ4, Bem. 4.1.1]. Zeigen Sie, dass der Satz von Bezout in einer affine Raum nicht gilt und zeigen Sie in welchem Punkt von Beweis braucht man dass die Polynomen homogene sind.

References

[BR04] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie*. Second. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen. [From the foundations to the applications]. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2004, pp. x+265.

[BR98] A. Beutelspacher and U. Rosenbaum. *Projective Geometry: From Foundations to Applications*. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 9780521483643.

[Fis85] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Fourth. Vol. 35. Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik [Vieweg Studies: Basic Mathematics Course]. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985, pp. viii+212.

[KÖ9] W. Kühnel. *Affine und projektive Räume*. `http://www.igt.uni-stuttgart.de/LstDiffgeo/Kuehnel/sommer09/affine.pdf`. 2009.

[KÏ4] S. Kühnlein. *Algebraische Geometrie*. `http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/alggeo2014s/media/alggeom.pdf`. 2014.

[Kir92] F.C. Kirwan. *Complex Algebraic Curves*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1992. ISBN: 9780521423533.

[KV15] H. Kasten and D. Vogel. *Einführung in die Geometrie*. `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/files/Skripte/ss15geom.pdf`. 2015.