UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 11. Juni 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 8

DEADLINE: Mi. 18. Juni 2025, 15:00.

1. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Zeigen Sie, dass der Konjugationslokus $C(p)$ für jeden Punkt $p \in M$ leer ist.
   Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe ein Jacobi-Feld J entlang einer Geodätischen γ mit $J(0) = 0 = J(t_0)$, $t_0 > 0$. Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt}\langle J', J\rangle \geq 0$. Erklären Sie, warum dann die Funktion $\langle J', J\rangle$ identisch 0 ist zwischen $t = 0$ und $t = t_0$. Was können Sie jetzt über die Funktion $||J||^2$ sagen?
2. Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, N eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, die lokal eine Isometrie ist. Beweisen Sie, dass f bijektiv ist, wenn je zwei Punkte von N durch eine eindeutige Geodätische verbunden werden können.
3. Die obere Halbebene $\{(x, y) : y > 0\}$ sei mit der Metrik
$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = \frac{1}{y}$$
   ausgestattet. Zeigen Sie, dass die Länge von $\{0\} \times [\epsilon, 1]$, $\epsilon > 0$, für $\epsilon \to 0$ gegen 2 strebt. Folgern Sie daraus, dass diese Metrik nicht vollständig ist.
4. Die obere Halbebene mit der Metrik
$$g_{11} = \frac{1}{y^2},\ g_{12} = 0,\ g_{22} = \frac{1}{y^2}$$
   ist vollständig.