UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 4. Juni 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 7

DEADLINE: Mi. 11. Juni 2025, 15:00.

1. In der Vorlesung wurde gesagt, die Bianchi Identität für den Riemannschen Krümmungstensor folge aus der Symmetrie des Levi-Civita Zusammenhangs, sowie der Jacobi Identität für die Lie Klammer. Führen Sie hier die Details durch.
2. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\sigma \subset T_pM$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum. Vervollständigen Sie den in der Vorlesung angedeuteten Beweis der Behauptung, dass
$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{A(x,y)^2}$$
unabhängig von der Wahl der Basis $\{x, y\}$ von σ ist. Zeigen Sie also, dass $K(x,y)$ unter den drei Transformationen
$$\begin{array}{lcl} \{x,y\} & \mapsto & \{y,x\} \\ \{x,y\} & \mapsto & \{\lambda x, y\} (\lambda \neq 0) \\ \{x,y\} & \mapsto & \{x + \lambda y, y\} \end{array}$$
invariant ist.
3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Seien $R, R' : V \times V \times V \to V$ zwei trilineare Abbildungen, die die Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors erfüllen. Zeigen Sie, dass aus der Gleichheit
$$\frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{A(x,y)^2} = \frac{\langle R'(x,y)x, y\rangle}{A(x,y)^2}$$
für alle linear unabhängigen $x, y \in V$ die Gleichheit von R und R' folgt. Schließen Sie daraus, dass die Schnittkrümmung den Riemannschen Krümmungstensor eindeutig bestimmt.