UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 29. April 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 2

DEADLINE: Mi. 7. Mai 2025, 15:00.

1. Zeigen Sie, dass sich die Signatur multiplikativ für Produktmannigfaltigkeiten verhält: Für zwei geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten M und N gilt $\sigma(M \times N) = \sigma(M)\sigma(N)$. (Hierbei wird das Produkt natürlich mit der Produktorientierung ausgestattet.)
2. Seien M_1 und M_2 orientierte, zusammenhängende, n-dimensionale, glatte Mannigfaltigkeiten. Für $i = 1, 2$ seien $D_i^n \subset M_i$ glatt eingebettete Disks und $\varphi : D_1^n \to D_2^n$ ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus. Die glatte Mannigfaltigkeit
$$M_1 \# M_2 := (M_1 - \operatorname{int} D_1^n) \cup_{\varphi|_{\partial D_1^n}} (M_2 - \operatorname{int} D_2^n)$$
heißt *zusammenhängende Summe von M_1 und M_2*. (Sie hängt nicht von den Wahlen der D_i^n und φ ab, da je zwei orientierungserhaltende glatte Einbettungen einer Disk glatt isotop zueinander sind.) Für m Kopien einer Mannigfaltigkeit M bezeichne $\# mM$ die zusammenhängende Summe all dieser Kopien. Berechnen Sie Schnittform und Signatur von
$$\# n\mathbb{C}P^2 \# m(-\mathbb{C}P^2).$$
3. Die algebraische Hyperfläche
$$M = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid \sum z_i^3 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3$$
ist eine glatte 4-Mannigfaltigkeit. Bestimmen Sie die Signatur von M. Ist M der Rand einer orientierten, kompakten 5-Mannigfaltigkeit? *Hinweis:* Verwenden Sie ohne Beweis, dass M diffeomorph zu $\mathbb{C}P^2 \# 6(-\mathbb{C}P^2)$ ist.
4. Bestimmen Sie die Schnittformen von
$$(S^2 \times S^2) \# -\mathbb{C}P^2 \text{ und } \mathbb{C}P^2 \# 2(-\mathbb{C}P^2)$$
und zeigen Sie, dass diese Formen isomorph sind. Bestimmen Sie die Signatur. (Tatsächlich sind die beiden Mannigfaltigkeiten diffeomorph.)