UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 25. April 2024

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 2

DEADLINE: Do. 2. Mai 2024, 15:00.

1. Berechnen Sie $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/_2 \oplus \mathbb{Z}/_3, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/_4 \oplus \mathbb{Z}/_6)$.
2. Berechnen Sie die Kohomologie $H^*(X)$ der zusammenhängenden Summe $X = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ auf zwei Arten:
   (a) mittels eines zellulären Kokettenkomplexes, und
   (b) mittels der universellen Koeffizientensequenz aus $H_*(X)$.
3. Sei C_* ein Kettenkomplex abelscher Gruppen und G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Kroneckerabbildung
$$\beta : H^p(\operatorname{Hom}(C_*, G)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p(C_*), G)$$
natürlich bezüglich Kettenabbildungen $\phi : C_* \to D_*$ ist. Zu zeigen ist also, dass das Diagramm
$$\begin{tikzcd} H^p(\operatorname{Hom}(D_*, G)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \operatorname{Hom}(H_p(D_*), G) \arrow[d, "\phi^*"] \\ H^p(\operatorname{Hom}(C_*, G)) \arrow[r, "\beta"] & \operatorname{Hom}(H_p(C_*), G) \end{tikzcd}$$
kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen ϕ^* von ϕ induziert werden.
4. Seien X und Y topologische Räume, sodass $H_p(X)$, $H_p(Y)$, $H^p(X)$ und $H^p(Y)$ unendlich zyklisch sind. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: Ist $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ Multiplikation mit n, dann ist $f^* : H^p(Y) \to H^p(X)$ Multiplikation mit $\pm n$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Kroneckerabbildung ein Isomorphismus ist.