UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 2. Juli 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 11

DEADLINE: Mi. 9. Juli 2025, 15:00.
Dies ist das letzte zulassungsrelevante Aufgabenblatt.

Sei $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen und $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \Gamma(TU)$ Vektorfelder auf U, sodass $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ eine Orthonormalbasis für T_xM ist für jedes $x \in U$. Definiere duale 1-Formen $\theta^1, \ldots, \theta^n \in \Omega^1(U)$ durch $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$. Sei θ der Spaltenvektor der θ^i.

1. Führen Sie die Details zu folgender Aussage der Vorlesung aus: es gibt eindeutig bestimmte 1-Formen $\omega^i_j \in \Omega^1(U)$ mit $\omega^i_j = -\omega^j_i$ und $d\theta^i = \sum_j \theta^j \wedge \omega^i_j$. Ist ω die $n \times n$-Matrix mit Einträgen ω^i_j, dann gilt also
$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$
2. Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf M. Zeigen Sie, dass die Formel
$$\omega^i_j(v) = \langle \nabla_v e_i, e_j \rangle$$
für Tangentialvektoren v gilt.
3. Beweisen Sie: Ist $\omega \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form und X, Y zwei Tangentialvektorfelder, dann gilt
$$(d\omega)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$
4. Sei R der Riemannsche Krümmungstensor und Ω die $n \times n$-Matrix von 2-Formen $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. Zeigen Sie, dass die Beziehung
$$\Omega_{ij} = \langle R(-,-)e_i, e_j \rangle$$
gilt, d.h. Ω ist ein Maß für die Krümmung.