UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 25. Juni 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 10

DEADLINE: Mi. 2. Juli 2025, 15:00.

1. Beweisen Sie mit Hilfe zellulärer Homologie: Die Sphäre S^{n-1} ist kein Retrakt des Balls D^n (d.h. es existiert keine stetige Abbildung $D^n \to S^{n-1}$, sodass die Zusammensetzung $S^{n-1} \hookrightarrow D^n \to S^{n-1}$ mit der Randinklusion $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Identität ist).
2. Zeigen Sie, dass die schwachen Morse Ungleichungen aus den starken Morse Ungleichungen formal folgen, d.h. ohne Benützung der Hauptsätze der Morse Theorie.
3. Wie in der Vorlesung stellen wir uns den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^2$ vor als

$$\mathbb{C}P^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

(komplexe homogene Koordinaten) und betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{C}P^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = |z_0|^2 + 2|z_1|^2 + 3|z_2|^2$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(b) Berechnen Sie den Morse Index jedes kritischen Punkts.

(c) Ist f eine Morse Funktion, d.h. sind alle kritischen Punkte nicht ausgeartet?

(d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der minimalen CW Struktur von $\mathbb{C}P^2$ (siehe Übungsaufgaben 9).

Hinweis: Arbeiten Sie der Reihe nach in jeder der drei "affinen" Karten von $\mathbb{C}P^2$.