UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Institut für Mathematik
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 14. April 2025

DIFFERENTIALTOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 1

DEADLINE: Mi. 30. April 2025, 15:00.

1. Berechnen Sie die (de Rham) Kohomologie der Produktmannigfaltigkeit $M = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times S^3$.
2. Bestimmen Sie die Schnittform $\langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \eta$, $\omega, \eta \in H^2(M^4)$, und die Signatur der Mannigfaltigkeit $M^4 = S^2 \times S^2$.
3. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{C}P^2$ besitzt einen Diffeomorphismus auf sich selbst, der die Orientierung umkehrt.
4. Man kann zeigen, dass die Schnittform der *Kummer-Fläche*

$$K3 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}P^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$$

(eine geschlossene orientierte 4-Mannigfaltigkeit) durch die Matrix

$$(-E_8) \oplus (-E_8) \oplus H \oplus H \oplus H$$

dargestellt werden kann, wobei

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Dies muss im Rahmen der Aufgabe nicht bewiesen werden.) Berechnen Sie aus dieser Information die Signatur der Kummer-Fläche!