



Spezialvorlesung

Witte:

Einführung in die Theorie der Kreisteilungskörper

Modul: MG38

Zeit: Di 14:00-16:00

Ort: INF 288 / MathI HS 4

Großgebiet: Algebra und Zahlentheorie

Inhalt: Kreisteilungskörper spielten, insbesondere wegen ihrer Beziehung zu der Fermat-Vermutung, in der Entwicklung der modernen algebraischen Zahlentheorie eine tragende Rolle. Es war die Fermat-Vermutung, die Kummer dazu motivierte, die Arithmetik dieser Körper einer tiefeschürfenden Untersuchung zu unterziehen. Das Fehlen einer eindeutigen Primfaktorzerlegung in ihren Ganzheitsringen brachte ihn zur Entwicklung des heute fundamentalen Konzepts der Idealklassengruppe. Die Ordnung dieser Gruppe, die Klassenzahl, misst, wie weit der Ganzheitsrings eines Zahlkörpers von einem faktoriellen Ring entfernt ist.

Eines der erstaunlichsten Ergebnisse der modernen Zahlentheorie ist die Einsicht, dass sich die Arithmetik der Kreisteilungskörper durch gewisse komplex-analytische Funktionen, die Dirichlet'schen L-Funktionen, codieren lässt. So kann man etwa die Klassenzahl aus der Kenntnis der Werte dieser L-Funktionen an der Stelle 1 zurückgewinnen. Aber auch die Werte an negativen ganzzahligen Stellen enthalten wichtige arithmetische Informationen. Diese Werte sind stets algebraische Zahlen, lassen sich also insbesondere als Elemente von p -adischen Körpern auffassen. Auf diese Weise bestimmen sie eindeutige p -adische Funktionen, die die arithmetische Information von der komplex-analytischen Welt in die p -adische Welt übertragen. In der Tat lassen sich diese p -adischen L-Funktionen nun nutzen, um tiefliegende Resultate über die Struktur der Klassengruppe von Kreisteilungskörpern zu erzielen. Der genaue Zusammenhang tritt jedoch erst deutlich zutage, wenn man nicht einen einzelnen Kreisteilungskörper betrachtet, sondern den gesamten Turm der p -ten Kreisteilungskörper hinaufsteigt.

Diese Erkenntnis des japanischen Mathematikers Kenkichi Iwasawa war die Geburtsstunde einer fruchtbaren Theorie, die heute seinen Namen trägt und die letztendlich auch zu einem wichtigen Baustein für Andrew Wiles bei dem endgültigen Beweis der Fermat-Vermutung wurde. Der Anspruch dieser Vorlesung ist es, einige wichtige Etappen dieser Entwicklung nachzuvollziehen und den Hörer mit den fundamentalen Ergebnissen aus der Theorie der Kreisteilungskörper vertraut zu machen.

Literatur:

Washington: Introduction to Cyclotomic Fields

Lang: Cyclotomic Fields I+II

Coates, Sujatha: Cyclotomic Fields and Zeta Values

Voraussetzungen: Algebra I, Algebraische Zahlentheorie

Zielgruppe: Studenten der Mathematik (Bachelor/Master)

Bemerkungen: Prüfungsform: mündliche Prüfung