Schnitttheorie algebraischer Varietäten

Seminar im Wintersemester 2015/16

Dr. J. Schmidt, Dr. M. Witte

Inhalt

In der Schnitttheorie geht es um die folgende Frage: Seien zwei Untervarietäten A, B auf einer algebraischen Varietät X. Was läßt sich über den Schnitt $A \cap B$ aussagen? Damit ist die Schnitttheorie zentrales Werkzeug für sehr klassische (enumerative Geometrie, etc.) bis hoch moderne (Theorie der Motive, algebraische Zykel, etc.) Fragestellungen der algebraischen Geometrie.

Als vielleicht erstes Theorem der Schnitttheorie kann man den Satz von Bezout bezeichnen: Zwei verschiedene projektive ebene Kurven vom Grad a und b über einem algebraisch abgeschlossenen Körper schneiden sich immer in mindestens einem und höchstens ab Punkten. Vom konzeptionellen Standpunkt her ist es jedoch vorteilhaft, noch das Verhalten der Kurven in einer infinitesimalen Umgebung der Schnittpunkte in die Rechnung mit einzubeziehen, indem man dem Schnittpunkt eine Multiplizität zuweist. Zum Beispiel ordnet man dem Schnittpunkt $(0,0)$ der Koordinatenachse $x = 0$ mit der Kurve $y = x^n$ die Multiplizität n zu. Zählt man nun die Schnittpunkte gewichtet mit ihren Multiplizitäten, so ist das Ergebnis immer die Schnittzahl ab.

Ersetzt man die projektive Ebene durch eine beliebige Fläche X, kann man zwei Kurven A und B auf X immer noch eine eindeutige Schnittzahl $A.B \in \mathbb{Z}$ zuordnen, sodass $A.B$ im Fall von glatten Kurven mit transversalen Schnitten in $\{P_1, \ldots, P_r\}$ gerade r ergibt und außerdem eine bilineare Paarung

$$\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$$

induziert. Dazu nutzt man ganz wesentlich das Theorem von Bertini, dass es erlaubt, zwei Divisoren so in ihrer linearen Äquivalenzklasse zu bewegen, bis man sie als Differenz von irreduziblen glatten Kurven mit transversalen Schnitten dargestellt hat.

Ziel ist die Entwicklung eines analogen Schnittprodukts für Varietäten X beliebiger Dimension. Der Schnitt von zwei Untervarietäten A und B der Kodimensionen r und s in hinreichend allgemeiner Lage ist zunächst einmal ein algebraischer Zykel der Kodimension $r+s$, also eine formale $\mathbb{Z}$-Linearkombination von mit Multiplizitäten behafteten irreduziblen Untervarietäten der Kodimension $r+s$. Im Allgemeinen jedoch werden sich A und B nicht immer in der richtigen Kodimension $r+s$ schneiden. Um in solchen Fällen ein geeignetes Schnittprodukt definieren zu können, betrachten wir die Chow-Gruppen $\mathrm{CH}^n(X)$ der n-kodimensionalen algebraischen Zykel bis auf rationale Äquivalenz. Statt des Theorems von Bertini nutzen wir die zentrale Technik der Deformation zum Normalenkegel, um A und B so zu deformieren, bis sie sich transversal schneiden. So erhalten wir ein wohldefiniertes Schnittprodukt

$$\mathrm{CH}^r(X) \times \mathrm{CH}^s(X) \to \mathrm{CH}^{r+s}(X).$$

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Master Mathematik*. Kenntnisse der algebraischen Geometrie werden vorausgesetzt.

Zeit und Ort

Di 14–16, Ort: TBA.

Vorbesprechung und Vortragsvergabe

Donnerstag der 23.07., 14 Uhr, HS 3.

Kontakt

Dr. Johannes Schmidt,
Universität Heidelberg, INF 288, Raum 104a
`jschmidt@mathi.uni-heidelberg.de`,
Tel. +49-6221-54-6273

Dr. Malte Witte,
Universität Heidelberg, INF 288, Raum 109
`witte@mathi.uni-heidelberg.de`,
Tel. +49-6221-54-5642

Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Ziel des jeweiligen Vortragenden sollte es sein, den von ihm zu behandelnden Stoff selbst zu verstehen und ihn auch versändlich an die übrigen Seminarteilnehmer vermitteln zu können.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache möglich. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgegelichen werden. Eine aktive und konstruktive Seminarteilnahme kann in der Vortragsnote positiv berücksichtigt werden.

Die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit dem Seminarleiter in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Er steht darüber hinaus auch jederzeit für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag`

Vorträge

Vortrag 1: Einführung

Wir geben eine kurze Einführung in das Thema, in der wir die zentralen Ergebnisse des Seminars vorstellen und Beispiele diskutieren. Dieser Vortrag wird von der Seminarleitung übernommen. Eine gute Grundlage zum Selberlesen ist der Anhang über Schnitttheorie in [Ha77].

Vortrag 2: Definition und erste Eigenschaften der Chow-Gruppen

Definiere algebraische Zykel, rationale Äquivalenz und Chowgruppen, sofern dies nicht schon im ersten Vortrag geschehen ist. Zeige die Existenz vom eigentlichen Pushforward von flachem Pullback. Illustriere gegebenenfalls, was für den Pushforward entlang $\mathbb{A}^1_k \to k$ schief geht. Diskutiere die Lokalisierungsfolge und $\mathbb{A}^1$-Invarianz. [Ful98, Kap. 1].

Vortrag 3: Divisoren

Die Definition des Schnittprodukts zweier Zykel wird letztendlich auf den Fall zurückgeführt, dass einer der beiden Zykel ein Divisor ist. Dieser Fall soll in diesem Vortrag behandelt werden. Definiere Pseudo-Divisoren D und den Schnitt $D.V$ mit einer Varietät V. Zeige erste Eigenschaften und die Kommutativität des Schnittprodukts von Divisoren. [Ful98, §2.1–2.4].

Vortrag 4: Beispiele und Chern-Klassen

Bevor wir weiter Theorie anhäufen, diskutieren wir ein paar explizite Beispiele: 17.6 (X/G), 1.9.3 ($\mathbb{P}^n$, wichtig!), 1.9.5, 2.1.2, 2.1.3, 2.4.4 (negativer Selbstschnitt, wichtig). Außerdem werden die Chern-Klassen eingeführt. Zunächst handelt es sich dabei nur um eine Umformulierung des Schnitts mit Divisoren. (Prop. 2.5, 2.6). Am Ende sollen noch die Beispiele 2.6.1 (geradenbündel, wichtig) und 2.6.6 behandelt werden. Alle Referenzen beziehen sich auf [Ful98].

Vortrag 5: Vektorbündel und Gysin-Homomorphismus

Der nächste Schritt ist die Verallgemeinerung von Divisoren (also Geradenbündeln) auf Vektorbündel beliebiger Dimension. Dies ist der letzte Schritt vor der Definition des Schnittprodukts. Definiere die Segre-Klasse eines Vektorbündels und zeige elementare Eigenschaften und führe die Chernklassen mit ihren elementaren Eigenschaften ein. Berechne dann die Chowgruppen von Vektorbündeln und definiere die Gysin-Abbildung. [Ful98, Kap. 3]

Vortrag 6: Deformation zum Normalenkegel

Die Deformation zum Normalenkegel ist die zentrale geometrische Technik der Schnitttheorie. Definiere reguläre Einbettung und den Normalenkegel. Zeige, dass der Normalenkegel einer reguläre Einbettung ein Vektorbündel ist. Definiere die Deformation zum Normalenkegel. Hier sollten alle Details erklärt werden [Ful98, Kap. 5]. Wiederhole gegebenenfalls Material aus em Anhang von Fulton bzw. aus [Ha77]. Definiere das Schnittprodukt und zeige erste Eigenschaften [Ful98, Prop. 6.1].

Vortrag 7: Der Chow-Ring

Wir zeigen, dass die Chow-Gruppen einen kommutativen graduierten Ring bilden, außerdem die Kompatibilität mit Pullback und Pushforward und die Funktorialität. Falls Zeit bleibt, diskutieren wir auch lokal vollständige Durchschnitts-Morphismen.

Vortrag 8: Ausblick

Wir beenden das Seminar mit einem Ausblick auf weiterführende Themen, etwa den Satz von Grothendieck-Riemann-Roch, höhere Chow-Gruppen und Motive.

Literatur

[Blo86] Spencer Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, *Adv. in Math.*, 61 (3), 267–304, 1986.

[EH13] David Eisenbud and Joe Harris, *3264 & All That — Intersection Theory in Algebraic Geometry*, Preliminary Version, `http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf`, 2013.

[Ful98] William Fulton, *Intersection Theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[FL85] William Fulton and Serge Lang, *Riemann-Roch algebra*, volume 277 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, New York, 1985

[Ha77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Tra07] Günther Trautmann, *Introduction to Intersection Theory*, Preliminary version, `http://www.mathematik.uni-kl.de/~trm/download/IntersTh.ps`, 2007.