Seminar zur homologischen Algebra

Prof. Dr. A. Schmidt mit Dr. M. Witte

Zeit und Ort:

Mi 11–13 c. t. , HS4

Vorkenntnisse:

Lineare Algebra I, II, Grundkenntnisse über Ringe, Moduln und exakte Folgen.

Inhalt:

Die homologische Algebra ist ein Zweig der Algebra, der sich zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel in einer Vielzahl mathematischer Gebiete entwickelt hat, u. a. algebraische Topologie, Zahlentheorie, algebraische Geometrie, Differentialgeometrie und Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Das Ziel dieses Seminar ist es, die Grundlagen der homologischen Algebra zu erarbeiten und Anwendungen sowie Beispiele kennenzulernen. In späteren Vorträgen werden wir uns der Kohomologie von Gruppen zuwenden und einige wesentliche Eigenschaften studieren. Das Seminar baut zu großen Teilen auf dem Buch "A Course in Homological Algebra" von Hilton und Stammbach auf ([HS], siehe Literaturliste am Ende). In späteren Vorträgen wird auch auf das Buch [We] und als Ergänzung auch auf [Ke] und [La] zurückgegriffen.

Zum Ablauf:

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Die Mindestanforderung an den Vortrag ist, dass der Vortragende selbst den Stoff, über den er vorträgt, durchdrungen hat. Ferner sollte der Vortragende in der Lage sein, den Stoff den anderen Seminarteilnehmern verständlich zu vermitteln.

Die Vorträge sollen vorzugsweise an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit dem Tutor möglich. Für frei gehaltene Vorträge gibt es Pluspunkte. Ein mangelhafter Vortrag kann durch eine schriftliche Ausarbeitung ausgegelichen werden. Die Dauer der Vorträge sollte 90 Minuten nicht überschreiten.

Es wird erwartet, dass die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit dem Tutor Martin Sigl in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Der Tutor steht darüber hinaus auch auch für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Kontakt:

Seminarleitung:
Dr. Malte Witte, `witte@mathi.uni-heidelberg.de`, Zi. 109
Repitiorium:
Dipl. Math. Martin Sigl, `sigl@mathi.uni-heidelberg.de`, Zi. 004

Programm

Im folgenden sei Λ ein Ring mit 1 (nicht notwendigerweise kommutativ), und G sei eine (zumeist endliche) Gruppe.

Vortrag 1: (Links-)Moduln und Homomorphismen
Natalia Andrea Hernandez Vargas (27.10.10)

Wiederhole Λ-Linksmoduln und -Rechtsmoduln und Λ^{opp} mit Beispielen; behandle Homomorphismen, exakte Sequenzen und kommutative Diagramma, zeige das Fünferlemma ([HS], ÜA 1.2) statt Lemma 1.1 (§ I.1). Wiederhole Summen und Produkte mit ihren universalen Eigenschaften Prop. 3.2 & 3.3 ([HS], § I.3). Definiere die Gruppe der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ zwischen zwei Λ-Linksmoduln A und B und zeige die beiden kurzen exakten Sequenzen in den Theorem 2.1 und 2.2 ([HS], § I.2). Bestimme als Beispiele $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ für beliebiges B.

Vortrag 2: Projektive und injektive Moduln
Carolin Mendl (03.11.10)

Wiederhole kurz den Begriff des freien Moduls und zeige Prop. 4.3. Definiere projektive Moduln und zeige Prop. 4.4-4.7 ([HS], § I.4). Als Beispiel charakterisiere man projektive Moduln über Hauptidealringen ([HS], § I.5, Theorem 5.1 ohne Beweis).
Erläutere das Dualitätsprinzip und definiere injektive Moduln. ([HS], § I.6). Zeige, dass über Hauptidealringe die injektiven Moduln gerade die divisiblen Moduln sind ([HS], § I.7) und zeige, dass jeder Λ-Modul in einen injektiven eingebettet werden kann ([HS], § I.8, Prop 8.3).

Vortrag 3: Kategorien und Funktoren
Julie Yuan Merten (10.11.10)

Definiere den Begriff der Kategorie und erläutere ihn an Beispielen (**Sets, Gr, Ab, Vekt**$_K$**, Ring,** Λ**-Mod**) ([HS], § II.1). Definiere den Begriff des Funktors (sowohl ko- als auch kontravariant) ([HS], § II.2). Behandle Monomorphismen, Epimorphismen, Dualität, projektive und injektive Objekte ([HS], § II.3) und führe die natürliche Transformation und natürliche Äquivalenz ein ([HS], § II.4). Zum besseren Verständnis ist es ratsam, alle Begriffe am Beispiel der Kategorie der Λ-Moduln zur erläutern.

Vortrag 4: Abelsche Kategorien
Laura Arnold (17.11.10)

Behandle Produkte und Koprodukte im kategoriellen Sinne, definiere Nullobjekt, Nullmorphismus (in [HS], § II.1), additive Kategorien, Kern, Kokern (ÜA 3.4 in [HS], § II.3), abelsche Kategorie und kurze exakte Sequenz ([HS], § II.9). Zeige, dass Λ-**Mod** eine abelsche Kategorie ist. Definiere injektive und projektive Objekte in Kategorien und vergleiche mit den Begriffen aus Vortrag 2 ([HS], § II.10).

Vortrag 5: Kettenkomplexe und Homologie
Fabian Grünig (24.11.10)

Definiere Kettenkomplexe, Ketten, Zykel, Ränder, Homologie eines Kettenkomplexes. Dualisiere: Kokettenkomplexe, Kozykel, Koränder, Kohomologie ([HS], § IV.1). Zeige das Schlangenlemma ([HS], III.5.1) und die lange exakte (Ko-)Homologiesequenz ([HS], § IV.2). Definiere Homotopie und zeige [HS], Prop. IV.3.1. Erwähne noch den Begriff der kontrahierenden Homotopie.

Vortrag 6: Abgeleitete Funktoren
Patrick Michl (08.12.10)

Definiere projektive und injektive Auflösungen ([HS], § IV.4) und benutze sie zur Definition von abgeleiteten Funktoren. Betrachte insbesondere die Konsequenzen für links- bzw. rechtsexakte Funktoren ([HS], § IV.5). Zeige die lange exakten (Ko-)Homologiesequenz für abgeleitete Funktoren ([HS], § IV.6).

Vortrag 7: Die Funktoren Ext^n und $\overline{\mathrm{Ext}}^n$
Erik Schnetter (15.12.10)

Definiere Ext^n, $\overline{\mathrm{Ext}}^n$ als rechtsabgeleitete Funktoren und zeige deren natürliche Äquivalenz ([HS], §§ IV.7, IV.8). Bringe einige Beispiele ([HS], zweiter Teil von § III.4). Zeige: $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ für alle $n \geq 2$ und alle abelschen Gruppen A, B (Hinweis: Dies folgt daraus, dass jede abelsche Gruppe eine projektive Auflösung der Form $\ldots \to 0 \to 0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ hat, vgl. Vortrag 2).

Vortrag 8: Ext^n und Erweiterungen; Tensorprodukte und Tor_n
Max Daniel (12.01.11)

Zeige: $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$ kodiert die Isomorphieklassen von Erweiterungen von A mit B ([HS], Theorem III.2.4, vgl. auch [We], Theorem 3.4.3).
Wiederhole den Begriff des Tensorprodukts ([HS], Anfang von § III.7), definiere Tor_n als abgeleiteten Funktor ([HS], § IV.11, ohne Theorem 11.2). Zeige: Für eine abelsche Gruppe A ist $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ isomorph zur Torsionsuntergruppe von A ([HS], ÜA III.8.3; verwendet $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q}) = 0$).

Vortrag 9: Gruppen(ko)homologie
Claudio Heinrich (19.01.11)

Wiederhole den Begriff des Gruppenrings, definiere Augmentationsabbildung und -ideal ([HS], § VI.1). Definiere Gruppen(ko)homologie ([HS], § VI.2) und bestimme H^0, H_0 ([HS], § VI.3) sowie H^1, H_1 bei trivialen G-Moduln ([HS], § VI.4).

Vortrag 10: Verschränkte Homomorphismen; zyklische Gruppen
Carolin Peternell (26.01.11)

Deute H^1 im allgemeinen Fall mit Hilfe von verschränkten Homomorphismen ([HS], § VI.5, Kor. 5.2). Behandle semidirekte Produkte und den Zusammenhang zu verschränkten Produkten.
Bestimme die (Ko-)Homologie endlicher zyklischer Gruppen (hier benutze man anstatt [HS], § VI.7 besser [We], Calculation 6.2.1 & Theorem 6.2.2).

Vortrag 11: Die Querauflösung
Jonas von Andrian (02.02.11)

Erkläre die homogene und die inhomogene Querauflösung ([HS], § VI.13 (a), (b)) und beschreibe mit ihr die ersten Homologie- und Kohomologiegruppen ($n = 0, 1, 2$). Als Anwendungen lassen sich die Beispiele aus den letzten beiden Vorträgen erneut herleiten. Siehe dazu auch [We], Beispiele 6.5.2, 6.5.6, 6.5.7.

Literatur

[HS] Hilton, Peter John und Stammbach, Urs: *A Course in Homological Algebra*, Springer Verlag, 1971

[Ke] Kersten, Ina: *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen, 2007

[La] Lang, Serge: *Algebra. Revised 3rd Edition*, Springer Verlag, 2002

[We] Weibel, Charles: *An Introduction to Homological Algebra*, Cambrigde University Press, 1994