Zetafunktionen und L-Reihen

Seminar Zahlentheorie
im Sommersemester 2011

Inhalt

In diesem Seminar untersuchen wir gewisse analytische Funktionen, die auf erstaunliche Art und Weise mit den arithmetischen Eigenschaften von Zahlkörpern in Zusammenhang stehen. Ein erstes Beispiel dafür ist die Klassenzahlformel, die die Klassenzahl eines Zahlkörpers mit seiner Dedekind-Zetafunktion in Verbindung setzt. Die Dedekindsche Zetafunktion findet ihre Verallgemeinerung in der Theorie der Heckeschen und Artinschen L-Reihen, die wir ebenfalls studieren werden.

Vorkenntnisse

Algebraische Zahlentheorie, etwas Analysis und Funktionentheorie

Zeit und Ort

Mittwoch 16:00 - 18:00; INF 288 / MathI HS 3.

Vorbesprechung

Donnerstag, 03.02.2011, 13:00; INF 288/ MathI HS 3.
Es sind noch Vorträge übrig. Bei Interesse bitte bei mir melden.

Kontakt

Malte Witte
Raum 109
`witte@mathi.uni-heidelberg.de`
Tel. +49-6221-54-5642

Vorträge

Vortrag 1: Die Riemannsche Zetafunktion

Erik Schnetter (13.04.11)

[Neu92], VII.1. Die wesentlichen Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion werden vorgestellt. Zentral ist der Beweis der Fortsetzbarkeit durch die Anwendung des Mellin-Prinzips auf die Jacobische Thetareihe. Daneben soll die Eulerproduktdarstellung behandelt werden. Wenn die Zeit reicht, soll auch auf die Werte an den geradzahligen Stellen eingegangen werden.

Vortrag 2: Theta-Reihen

Jonas von Andrian (20.04.11)

[Neu92], VII.3. Die höherdimensionalen Analoga der Jacobischen Thetareihe werden eingeführt und ihre Eigenschaften studiert. Diese Thetareihen werden in den folgenden Vorträgen benutzt, um die Funktionalgleichung für die Dedekindsche Zetafunktion zu beweisen. Zunächst handelt es sich aber um pure Analysis.

Vortrag 3: Die Dedekindsche Zetafunktion I

Michael Becker (04.05.11)

[Neu92], VII.4, VII.5 bis einschließlich Satz 5.5. In diesem Vortrag wird die Dedekindsche Zetafunktion eingeführt und der Beweis der Funktionalgleichung vorbereitet.

Vortrag 4: Die Dedekindsche Zetafunktion II

Michael Becker (11.05.11)

[Neu92], Rest von VII.5. Der Beweis der Funktionalgleichung wird zu Ende geführt. Die Klassenzahlformel folgt als Korollar. Wenn genügend Zeit bleibt, kann auch noch einmal auf den Dirichletschen Primzahlsatz eingegangen werden.

Vortrag 5: Größencharaktere

Erik Schnetter (18.05.11)

[Neu92], VII.6 bis einschließlich Korollar 6.10. Größencharaktere sind die natürliche Verallgemeinerung von Dirichlet-Charakteren. Sie werden in diesem Vortrag eingeführt. Ihre ideltheoretische Interpretation überspringen wir.

Vortrag 6: Theta-Reihen algebraischer Zahlkörper

Jonas von Andrian (25.05.10)

[Neu92], VII.7. Auch für Größencharaktere gibt es wieder passende Theta-Reihen. Sie werden in diesem Vortrag genauer unter die Lupe genommen.

Vortrag 7: Heckesche L-Reihen
Claudio Heinrich (01.06.11)

[Neu92], VII.8. Heckesche L-Reihen und verallgemeinerte Dirichletsche L-Reihen werden definiert und ihre Funktionalgleichung bewiesen.

Vortrag 8: Der Shintanische Einheitensatz
Matthias Schlöder (09.06.11)

[Neu92], VII.9 bis einschließlich Korollar 9.6. Der Beweis des Shintanischen Einheitensatzes ist der erste Schritt zur Bestimmung der Werte der verallgemeinerten Dirichletschen L-Reihen an den ganzzahligen Stellen.

Vortrag 9: Werte von L-Reihen an den ganzzahligen Stellen
Matthias Schlöder (15.06.11)

[Neu92], Rest von VII.9. Um die Werte der L-Funktionen zu berechnen, müssen wir noch die Beziehung zwischen Zetafunktionen und Bernoullischen Zahlen genauer verstehen. Das geschieht in diesem Vortrag. Zusammen mit dem Ergebnis aus dem letzten Vortrag erhält man dann eine explizite Formel.

Vortrag 10: Höhere Verzweigungsgruppen und Klassenkörpertheorie
N. N. (22.06.11)

In den folgenden Vorträgen brauchen wir einige tiefer liegende Ergebnisse aus der algebraischen Zahlentheorie, die in diesem Vortrag vorgestellt werden sollen. Zum einen brauchen wir die Definition und Eigenschaften höherer Verzweigungsgruppen ([Neu92], II.10, V.6), zum anderen die Hauptsätze der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie ([Neu92], V.1.3, V.1.4, VI.5.5, VI.6.1 – VI.6.9). Letztere können wir natürlich nur zitieren. Eine gute Zusammenfassung findet sich auch in [Koc97], II.1.

Vortrag 11: Lineare Darstellungen von endlichen Gruppen
N. N. (29.06.11)

[Neu92], VII.10, Seiten 541–544 bis einschließlich Satz 10.3; [Ser97]. Ziel des Vortrages ist eine kurze Zusammenstellung der Tatsachen aus der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen, die wir für die Untersuchung Artinscher L-Reihen benötigen. Die Beweise der entsprechenden Aussagen sollen soweit wie möglich skizziert werden. Schön wäre es, wenn es gelänge, den Satz von Brauer vollständig zu beweisen.

Vortrag 12: Artinsche L-Reihen
N. N. (06.07.11)

[Neu92], Rest von VII.10. Die Artinschen L-Reihen werden eingeführt und ihre elementaren Eigenschaften untersucht. Schließlich wird gezeigt, dass im Falle von abelschen Zahlkörpererweiterungen die Artinschen L-Reihen auf Heckesche L-Reihen zurückgeführt werden können. Der Beweis verwendet das Artin-Symbol der globalen Klassenkörpertheorie.

Vortrag 13: Der Artin-Führer
N. N. (13.07.11)

[Neu92], VII.11. Der Artin-Führer wird eingeführt und die Führer-Diskriminaten-Formel bewiesen. Dazu wird etwas Wissen über höhere Verzweigungsgruppen und lokale Klassenkörpertheorie gebraucht.

Vortrag 14: Die Funktionalgleichung für Artinsche L-Reihen
N. N. (20.07.11)

[Neu92], VII.12. Die Funktionalgleichung wird mittels des Satzes von Brauer auf die Funktionalgleichung für Heckesche L-Reihen reduziert.

Literatur

[Koc97] H. Koch. *Algebraic Number Theory.* Springer, 1997.

[Neu92] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992.

[Ser97] J. P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups.* Number 42 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.