Zetafunktionen und L-Reihen

Seminar/Hauptseminar Sommersemester 2008
NWF-I Mathematik, Universität Regensburg
Prof. Dr. Alexander Schmidt, Malte Witte

Inhalt

In diesem Seminar untersuchen wir gewisse analytische Funktionen, die auf erstaunliche Art und Weise mit den arithmetischen Eigenschaften von Zahlkörpern in Zusammenhang stehen. Ein erstes Beispiel dafür ist die Klassenzahlformel, die die Klassenzahl eines Zahlkörpers mit seiner Dedekind-Zetafunktion in Verbindung setzt. Die Dedekind'sche Zetafunktion findet ihre Verallgemeinerung in der Theorie der Hecke'schen und Artin'schen L-Reihen, die wir ebenfalls studieren werden.

Vorkenntnisse

Grundkenntnisse in algebraischer Zahlentheorie, etwas Analysis und Funktionentheorie

Zeit und Ort

Di 16–18 Uhr, M 103

Vorbesprechung

Do 7.2.2008 um 13:15 Uhr im M101

Anmeldung

bei der Vorbesprechung oder danach über M. Witte (Kontakt s.u.)

Kontakt: *Malte Witte,* `witte@math.uni-leipzig.de`*, Tel. (0341) 97 32239*

Vorträge

1. Die Riemann'sche Zetafunktion

[Neu92], VII.1. Die wesentlichen Eigenschaften der Riemann'schen Zetafunktion werden vorgestellt. Zentral ist der Beweis der Fortsetzbarkeit durch die Anwendung des Mellin-Prinzips auf die Jacobi'sche Thetareihe. Die Eulerproduktdarstellung wurde schon im Seminar des vorangegangenen Semesters behandelt, aber es schadet sicher nicht, sie zu wiederholen. Wenn die Zeit reicht, soll auch auf die Werte an den geradzahligen Stellen eingegangen werden.

2. Theta-Reihen

[Neu92], VII.3. Die höherdimensionalen Analoga der Jacobi'schen Thetareihe werden eingeführt und ihre Eigenschaften studiert. Diese Thetareihen werden in den folgenden Vorträgen benutzt, um die Funktionalgleichung für die Dedekind'sche Zetafunktion zu beweisen. Zunächst handelt es sich aber um pure Analysis.

3. Die Dedekind'sche Zetafunktion I

[Neu92], VII.4, VII.5 bis einschließlich Satz 5.5. In diesem Vortrag wird die Dedekind'sche Zetafunktion eingeführt und der Beweis der Funktionalgleichung vorbereitet.

4. Die Dedekind'sche Zetafunktion II

[Neu92], Rest von VII.5. Der Beweis der Funktionalgleichung wird zu Ende geführt. Die Klassenzahlformel folgt als Korollar. Wenn genügend Zeit bleibt, kann auch noch einmal auf den Dirichlet'schen Primzahlsatz eingegangen werden.

5. Größencharaktere

[Neu92], VII.6 bis einschließlich Korollar 6.10. Größencharaktere sind die natürliche Verallgemeinerung von Dirichlet-Charakteren. Sie werden in diesem Vortrag eingeführt. Ihre ideltheoretische Interpretation überspringen wir.

6. Theta-Reihen algebraischer Zahlkörper

[Neu92], VII.7. Auch für Größencharaktere gibt es wieder passende Theta-Reihen. Sie werden in diesem Vortrag genauer unter die Lupe genommen.

7. Hecke'sche L-Reihen

[Neu92], VII.8. Hecke'sche L-Reihen und verallgemeinerte Dirichlet'sche L-Reihen werden definiert und ihre Funktionalgleichung bewiesen.

8. Höhere Verzweigungsgruppen und Klassenkörpertheorie

In den folgenden Vorträgen brauchen wir einige tiefer liegende Ergebnisse aus der algebraischen Zahlentheorie, die in diesem Vortrag vorgestellt werden sollen. Zum einen brauchen wir die Definition und Eigenschaften höherer Verzweigungsgruppen ([Neu92], II.10, V.6), zum anderen die Hauptsätze der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie ([Neu92], V.1.3, V.1.4, VI.5.5, VI.6.1 – VI.6.9). Letztere können wir natürlich nur zitieren. Eine gute Zusammenfassung findet sich auch in [Koc97], II.1.

9. Lineare Darstellungen von endlichen Gruppen

[Neu92], VII.10, Seiten 541–544 bis einschließlich Satz 10.3; [Ser97]. Ziel des Vortrages ist eine kurze Zusammenstellung der Tatsachen aus der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen, die wir für die Untersuchung Artin'scher L-Reihen benötigen. Die Beweise der entsprechenden Aussagen sollen soweit wie möglich skizziert werden. Schön wäre es, wenn es gelänge, den Satz von Brauer vollständig zu beweisen.

10. Artin'sche L-Reihen

[Neu92], Rest von VII.10. Die Artin'schen L-Reihen werden eingeführt und ihre elementaren Eigenschaften untersucht. Schließlich wird gezeigt, dass im Falle von abelschen Zahlkörpererweiterungen die Artin'schen L-Reihen auf Hecke'sche L-Reihen zurückgeführt werden können. Der Beweis verwendet das Artin-Symbol der globalen Klassenkörpertheorie.

11. Der Artin-Führer

[Neu92], VII.11. Der Artin-Führer wird eingeführt und die Führer-Diskriminaten-Formel bewiesen. Dazu wird etwas Wissen über höhere Verzweigungsgruppen und lokale Klassenkörpertheorie gebraucht.

12. Die Funktionalgleichung für Artin'sche L-Reihen

[Neu92], VII.12. Die Funktionalgleichung wird mittels des Satzes von Brauer auf die Funktionalgleichung für Hecke'sche L-Reihen reduziert.

13. Dichtigkeitssätze

[Neu92], VII.13. Als Anwendung der Theorie der Hecke'schen L-Reihen beweisen wir den allgemeinen Dirichlet'schen und den Čebotarev'schen Dichtigkeitssatz. Auch dafür braucht man etwas Klassenkörpertheorie.

Literatur

[Koc97] H. Koch. *Algebraic Number Theory.* Springer, 1997.

[Neu92] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992.

[Ser97] J. P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups.* Number 42 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.