

Prof. A. Schmidt
M. Witte
NWF 1 - Mathematik
Universität Regensburg
Wintersemester 2008/2009

Proseminar über elementare Zahlentheorie (n.v.)

Beginn: 15.10.2008 **Raum:** M 103 **Zeit:** Mi, 12-14 Uhr
Vorbesprechung: Mi, 16.07 , 12.15 Uhr, H31

1. VORTRAG (15.10.): **Teilbarkeit und Primfaktorzerlegung**

Stefanie Haberkern

Zunächst sollen die Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen eingeführt und einige elementare Eigenschaften nachgewiesen werden [P, Kap. I, §1–§3, Def. 4]. Anschließend soll gezeigt werden, dass jede natürliche Zahl $n > 1$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt [P, Kap. II, §1, §2].

2. VORTRAG (22.10.): **Der ggT und der euklidische Algorithmus**

Christoph Wetzel

Es soll der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen a, b eingeführt werden und es soll gezeigt werden, wie man ihn aus der Primfaktorzerlegung von a und b bestimmen kann [P, Kap. III, §1, §2]. Danach soll der euklidische Algorithmus zur Berechnung des ggT vorgestellt werden [P, Kap. III, §3.1–3.3]. Falls die Zeit es zulässt, kann danach noch auf lineare diophantische Gleichungen mit 2 Variablen eingegangen werden [P, Kap. III, §3.4].

3. VORTRAG (29.10.): **Kongruenzen**

Stephan Gruschwitz

In diesem Vortrag wird das Rechnen mit Restklassen eingeführt und es wird gezeigt, dass die Menge der Restklassen zu einem festen Modul eine Partition der ganzen Zahlen bildet [P, Kap. IV, §1–§3, Satz 9]. Je nachdem, wie es die Zeit erlaubt, kann der Stoff dadurch angereichert werden, dass einige der Übungsaufgaben aus [P, Kap. IV, §2] vorgeführt werden.

4. VORTRAG (05.11.): **Kongruenzen II**

Daniel Tschakert

Es sollen die Restklassenaddition und -multiplikation eingeführt werden. Die Menge der Restklassen zu einem festen Modul bildet bezüglich dieser beiden Verknüpfungen einen kommutativen Ring. Es wird untersucht, wann dieser Ring nullteilerfrei ist [P, Kap. IV, §3, ab Satz 10]. Anschließend werden die Sätze von Euler und Fermat bewiesen und es wird auf Teilbarkeitsregeln eingegangen, welche die dezimale Quersumme benutzen [P, Kap. IV, §4.1, §4.2].

5. VORTRAG (12.11.): **Primzahlen**

Manuel Brucker

Zunächst soll durch den klassischen Beweis von Euklid gezeigt werden, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Danach sollen noch einige weitere Beweise für diese Tatsache gegeben werden [AZ, Kap. I]. Im Anschluss daran soll das „Sieb des Eratosthenes“ vorgestellt werden [P, Kap. V, §1] und es sollen noch einige elementare Aussagen über die Verteilung der Primzahlen gezeigt werden [P, Kap. V, §1, ab Satz 2, §2].

6. VORTRAG (19.11.): **Die Eulersche ϕ -Funktion**

Michael Spachtholz

Es wird die eulersche ϕ -Funktion eingeführt und gezeigt, dass für teilerfremde natürliche Zahlen m, n die Gleichung $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ gilt. Anschließend wird eine auf Gauß zurückgehende Summenformel für die eulersche ϕ -Funktion gezeigt [P, Kap. VI, §1, §2]. Der Vortragsstoff kann dadurch angereichert werden, dass einige der Übungsaufgaben aus [P, Kap. VI, §1] durchgeführt werden.

7. VORTRAG (26.11.): **g -adische Zahlssysteme**

Matthias Bauer

In diesem Vortrag wird gezeigt, dass sich – in Verallgemeinerung der üblichen Dezimaldarstellung – jede natürliche Zahl bezüglich einer beliebigen Basis $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eindeutig entwickeln lässt. Es werden die Algorithmen für die Grundrechenoperationen studiert und Teilbarkeitsregeln unter Verwendung der g -adischen Entwicklung hergeleitet [P, Kap. VII, §1–§3].

8. VORTRAG (03.12.): **Dezimalbrüche**

Stefan Lobmeyer

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen. Es sollen Kriterien dafür hergeleitet werden, wann die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl endlich bzw. (rein) periodisch ist [P, Kap. VIII, §1–§3]. Je nachdem, wie es die Zeit erlaubt, kann auch noch auf Verallgemeinerungen im Hinblick auf g -adische Entwicklungen eingegangen werden [P, Kap. VIII, §4].

9. VORTRAG (10.12.): **Vollkommene Zahlen / Fibonaccizahlen**

Kerstin Burger

Im ersten Teil des Vortrages werden die sogenannten vollkommenen Zahlen studiert. Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen, wenn die Summe der positiven Teiler von n genau $2n$ ergibt. Insbesondere soll eine auf Euler zurückgehende Charakterisierung vollkommener Zahlen gezeigt werden [P, Kap. IX, §1]. Der zweite Teil des Vortrags ist den Fibonacci-Zahlen gewidmet. Es werden verschiedene Rekursionsformeln hergeleitet [P, Kap. IX, §2].

10. VORTRAG (17.12.): **Das RSA-Verfahren**

Andrea Hirsch

In diesem Vortrag soll das RSA-Verfahren vorgestellt werden – ein Verschlüsselungsverfahren, dessen Grundidee elementar zahlentheoretischer Natur ist [B, Kap. 7, §1, §2].

11. VORTRAG (07.01.): **Die Funktion $[x]$**

Marina Lanzer

Für reelle Zahlen x bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x . Im Vortrag werden einige Eigenschaften dieser Funktion studiert [NZ1, Kap. 4, §1]. Als Anwendung soll eine Formel zur Bestimmung des Wochentages aus dem Datum diskutiert werden [NZ2, S. 357].

12. VORTRAG (14.01.): **Das Bertrand'sche Postulat**

Florian Kabl

Das Bertrand'sche Postulat besagt, dass es für jede natürliche Zahl n stets eine Primzahl gibt, welche im Intervall $[n, 2n]$ liegt. Es soll der von Erdős gegebene Beweis dieser Aussage vorgeführt werden [AZ, Kap. 2].

13. VORTRAG (21.01.): **Binomialkoeffizienten sind (fast) nie Potenzen**

Timm Deiner

Es soll gezeigt werden, dass die Gleichung $\binom{n}{k} = m^\ell$ für $\ell \geq 2$ und $4 \leq k \leq n - 4$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt. Der Beweis dazu stammt ebenfalls von Erdős [AZ, Kap. 3]. Außerdem soll kurz diskutiert werden, was in den Fällen $k = 2$ und $k = 3$ geschieht.

14. VORTRAG (28.01.): **Summen von zwei Quadraten**

Christina Preiß

Eine natürliche Zahl n kann genau dann als Summe von 2 Quadraten geschrieben werden, wenn in der Primfaktorzerlegung von n jeder Primfaktor der Form $p = 4m + 3$ mit geradem Exponenten auftritt. In diesem Vortrag soll ein sehr eleganter, auf Heath-Brown zurückgehender Beweis dieser Aussage vorgeführt werden [AZ, Kap. 4]. Zur besseren Illustration des Beweises sollte ein Beispiel komplett ausgearbeitet werden.

15. VORTRAG (04.02.): **Summen von vier und fünf Quadraten**

Mathias Straub

Inhalt dieses Vortrags ist ein Theorem von Lagrange, dass jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten geschrieben werden kann. Ferner können alle bis auf 12 explizit bekannte natürliche Zahlen als Summe von fünf positiven Quadratzahlen geschrieben werden [NZ1, Kap. 5.7].

Literatur

- [AZ] Aigner, M., Ziegler, G.: *Das Buch der Beweise*, Springer Verlag, Berlin 2002
- [B] Buchmann, J.: *Einführung in die Kryptographie*, Springer Verlag, Heidelberg 2004
- [NZ1] Niven, I., Zuckerman, H. S.: *Einführung in die Zahlentheorie I*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1976
- [NZ2] Niven, I., Zuckerman, H. S.: *Einführung in die Zahlentheorie II*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1976
- [P] Padberg, F.: *Elementare Zahlentheorie*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1989