Modulformen und Modulkurven

Seminar im Wintersemester 2014/15
Dr. M. Witte

Inhalt

Die Theorie der Modulformen spielt heute in vielen mathematischen Teilgebieten, wie etwa in der unendlichen Darstellungstheorie von Lie-Gruppen oder in der Theorie der endlichen Gruppen, eine wichtige Rolle. Ganz besonders bedeutend ist aber ihr Beitrag zu Fragestellungen aus dem Bereich der Zahlentheorie. So läßt sich etwa die Fermat-Vermutung auf eine tiefliegende Verbindung zwischen Modulformen und elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ zurückführen, die von Taniyama, Shimura und Weil vorhergesagt und von Taylor und Wiles bewiesen wurde.

Dieses Seminar dient als eine Einführung in die Theorie der Modulformen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Entwicklung einer algebraisch-geometrischen Sichtweise auf Modulformen als globale Schnitte von Geradenbündeln auf Modulkurven. Diese werden wir zunächst als riemannsche Flächen, dann als algebraische Kurven und als Modulräume kennenlernen. Im späteren Verlauf werden wir uns mit der Theorie der Hecke-Operatoren und L-Funktionen zu Spitzenformen beschäftigen. Insbesondere zeigen wir, dass die L-Funktion einer Spitzenform einer Funktionalgleichung genügt und somit auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist. Mit dem Modulariätstheorem von Taylor und Wiles können wir jeder elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ eine Spitzenform zuordnen, so dass die L-Funktion der Spitzenform mit der L-Funktion der elliptischen Kurve übereinstimmt. Insbesondere sind auch die L-Funktion dieser elliptischen Kurven auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Das Modularitätstheorem soll in einem Überblicksvortrag kurz behandelt werden.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Bachelor Mathematik* und *Master Mathematik*. Grundkenntnisse der Funktionentheorie und der Begriff der riemannsche Fläche werden vorausgesetzt.

Zeit und Ort

Ein einführender Vortrag findet am Donnerstag, den 09.10.2014, 18:00 - 20:00 im Raum J2 226 statt. Im Anschluß daran werden die übrigen Vorträge verteilt und die weiteren Termine mit den Seminarteilnehmern abgestimmt.

Kontakt

Dr. Malte Witte,
Universität Heidelberg, INF 288, Raum 109
witte@mathi.uni-heidelberg.de,
Tel. +49-6221-54-5642

Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Ziel des jeweiligen Vortragenden sollte es sein, den von ihm zu behandelnden Stoff selbst zu verstehen und ihn auch verständlich an die übrigen Seminarteilnehmer vermitteln zu können.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit mir möglich. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgegelichen werden. Eine aktive und konstruktive Seminarteilnahme kann in der Vortragsnote positiv berücksichtigt werden.

Die Dauer der Vorträge soll 90 Minuten nicht überschreiten. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Die Vortragenden sollten sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit mir in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit mir durchzusprechen. Ich stehe darüber hinaus auch jederzeit für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag`

Vorträge

Vortrag 1: Einführung
Witte 09.10.2014

Wir beginnen mit der klassischen Definition von Modulformen und Modulfunktionen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und lernen als Beispiele Eisenstein-Reihen, die Δ-Funktion und die j-Invariante kennen [Se70, Ch. VII].

Vortrag 2: Gruppenoperationen auf der oberen Halbebene

Für den nächsten Vortrag brauchen wir einige allgemeine Vorbereitungen über Gruppenoperationen auf topologischen Räumen sowie ein Klassifikationsresultat für Möbiustransformationen. Das nötige Material findet man in [Sh71, §1.1–1.2]. Eine andere gute Quelle ist [Ka14, §4.1].

Vortrag 3: Modulkurven als riemannsche Flächen

In diesem Vortrag betrachten wir den Faktorraum $X(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ der erweiterten oberen Halbebene $\mathbb{H}^*$ bezüglich einer fuchsschen Gruppe Γ. Es soll gezeigt werden, dass $X(\Gamma)$ die Struktur einer riemannschen Fläche trägt. Sie ist kompakt, falls Γ von erster Art ist. Falls $\Gamma' \subset \Gamma$ eine Untergruppe vom endlichen Index ist, so kann man die Verzweigungsindizes der Überlagerung $X(\Gamma') \to X(\Gamma)$ bestimmen [Sh71, §1.3, 1.5], siehe auch [Ka14, §4.4].

Vortrag 4: Kongruenzgruppen

Wir betrachten zunächst den Fall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und bestimmen einen Fundamentalbereich zu dieser Gruppe. Danach untersuchen wir das Geschlecht von $X(\Gamma)$ für Kongruenzgruppen, insbesondere für $\Gamma(N)$ und $\Gamma_0(N)$ [Sh71, §1.4, 1.6]. In [DS05, §3.9] findet man auch eine Berechnung der Geschlechter für $\Gamma_1(N)$.

Vortrag 5: Modulfunktionen und Modulformen

Wir lernen nun die allgemeine Definition von Modulfunktionen und Modulformen kennen und zeigen, dass sich meromorphe Modulformen vom Gewicht $2k$ mit k-fachen meromorphen Differentialformen identifizieren lassen. Dann bestimmen wir die Dimension des Raums der Modulformen vom Gewicht $2k$. Als Beispiel betrachten wir dann den Fall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ [Mil12, p. 48–55]. Ergänzend soll gezeigt werden, dass sich die Spitzenformen vom Gewicht 2 mit den holomorphen Differentialformen identifizieren [Sh71, Cor. 2.17]. Wenn genügend Zeit bleibt, kann man auch Spitzenformen und ungerade Gewichte diskutieren [Sh71, §2.6].

Vortrag 6: Elliptische Kurven

Dies ist ein Überblicksvortrag über komplexe elliptische Kurven und doppelt-periodische Funktionen. Die Zeit wird nicht ausreichen, alle Details zu beweisen. Ist $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein vollständiges Gitter, so ist $\mathbb{C}/\Lambda$ eine riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 und trägt eine Gruppenstruktur. Isogenien $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ entsprechen Streckungen $\alpha\Lambda \subset \Lambda'$. Die bezüglich Λ doppelt-periodischen Funktionen auf $\mathbb{C}$ entsprechen genau den meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}/\Lambda$. Der Körper der doppelt-periodischen Funktionen wird als $\mathbb{C}$-Algebra von der Weierstraß-Funktion $\wp$ und ihrer Ableitung $\wp'$ erzeugt. Die Punkte $(\wp(z), \wp'(z))$ parametrisieren eine komplexe elliptische Kurve [Mil12, §3].

Vortrag 7: Modulkurven als Modulräume

Die Punkte der Modulkurven $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ für $\Gamma = \Gamma(N), \Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ parametrisieren Isomorphieklassen von komplexen elliptischen Kurven mit Zusatzstrukturen. Dieser Standpunkt gibt Anlass zu neuen Beispielen von Modulfunktionen, mit denen sich die Körper der Modulfunktionen beschreiben lassen [DS05, §1.5, 7.5].

Vortrag 8: Modulkurven als algebraische Kurven

Dieser Vortrag setzt etwas algebraische Geometrie voraus. Zunächst soll an die Korrespondenz zwischen glatten algebraischen Kurven und Funktionenkörpern erinnert werden. Dann soll gezeigt werden, dass $X(\Gamma)$ für $\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ zu über $\mathbb{Q}$ definierten algebraischen Kurven korrespondiert. Für $\Gamma(N)$ ist die Kurve über $\mathbb{Q}(\mu_N)$ definiert [DS05, §7.2, 7.6, Anfang von 7.7].

Vortrag 9: Die L-Funktion einer Spitzenform

Wir beschränken uns im Weiteren auf die Betrachtung der Hecke-Untergruppen $\Gamma_0(N)$. Jeder Spitzenform zur Stufe N kann man eine L-Funktion zuordnen. Der Raum der Spitzenformen zerlegt sich bezüglich einer Involution ω_N in zwei Eigenräume. Die L-Funktionen zu den Elementen dieser Eigenräume genügen einer Funktionalgleichung und lassen sich so zu auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen ausdehnen [Kn98, §9.4].

Vortrag 10: Hecke-Operatoren

Wir führen Hecke-Operatoren für $\Gamma_0(N)$ ein und zeigen, dass die ordinären Hecke-Operatoren selbstadjungiert bezüglich des Petersson-Skalarproduktes sind. Die L-Funktion einer simultanen Eigenform hat eine Euler-Produkt-Darstellung [Kn98, §9.5].

Vortrag 11: Neuformen

Wir führen den Begriff der Neuform ein. Unter der Annahme des Multiplizität-1-Theorems können wir zeigen, dass die L-Funktion einer Neuform sowohl eine Euler-Produkt-Darstellung besitzt als auch einer Funktionalgleichung genügt [Kn98, §9.6].

Vortrag 12: Modularität

Zum Abschluß des Seminars skizzieren wir in einem Überblicksvortrag kurz die Definition der L-Funktion einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ und formulieren das Modularitäts-Theorem von Taylor und Wiles [DS05, §8], [Kn98, Ch. XI].

Literatur

[DS05] F. Diamond and J. Shurman, *A first course in modular forms*, Springer GTM 228, 2005.

[Ka14] H. Kasten, *Funktionentheorie II*, `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/Skripte`

[KK07] M. Koecher and A. Krieg, *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, 2007.

[Kn98] A. W. Knapp, *Elliptic curves*, Princeton U. P., 1998.

[La76] S. Lang, *Introduction to modular forms*, Springer GMW 222, 1976.

[Mil06] J. Milne, *Elliptic curves*, Booksurge, 2006.

[Mil12] J. Milne, *Modular functions and modular forms*, `http://www.jmilne.org/math`, 2012.

[Miy89] T. Miyake, *Modular forms*, Springer 1989.

[Og69] A. Ogg, *Modular forms and Dirichlet series*, Benjamin, 1969.

[Sc74] B. Schoeneberg, *Elliptic modular forms*, Springer GMW 203, 1974.

[Se70] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer GTM 7, 1970.

[Sh71] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton U. P., 1971.