Projektive Geometrie

Proseminar im Sommersemester 2015
M. Witte

Inhalt

Zwei parallele Geraden haben auf einer unbegrenzt ausgedehnten Ebene keinen Schnittpunkt. Aus der Perspektive eines Betrachters, der auf dieser Ebene steht und parallel zu den beiden Geraden in die Ferne blickt, sieht es aber so aus, als ob die beiden Geraden immer weiter zusammenlaufen wrden, um sich schließlich am Horizont scheinbar doch zu schneiden. Die Grundidee der projektiven Geometrie ist es, die Ebene durch den Horizont als unendlich ferne Gerade zu ergänzen: Man erhält so die sogenannte projektive Ebene. In dieser projektiven Ebene hat nun jedes Paar von nichtidentischen Geraden genau einen Schnittpunkt. Es zeigt sich, dass sich viele klassische Sätze der ebenen Geometrie viel bersichtlicher formulieren und einfacher beweisen lassen, wenn man sie als Aussagen ber die projektive Ebene auffasst. Allgemeiner definiert man projektive Räume fr beliebige Dimensionen. Diese Objekte sind der zentrale Untersuchungsgegenstand der projektiven Geometrie.

Das zentrale Hilfsmittel zur Untersuchung projektiver Räume ist die lineare Algebra. Jedem endlichdimensionalen Vektorraum V kann man einen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ zuordnen. Die Punkte dieses Raumes sind gerade die eindimensionalen Untervektorräume von V. Andersrum lässt sich jeder projektive Raum auf diese Art beschreiben. Sätze aus der projektiven Geometrie lassen sich so auf Sätze der linearen Algebra zurückführen. Die projektive Geometrie kann damit auch helfen, Sätze der linearen Algebra zu motivieren und zu veranschaulichen. Schließlich ist ein Verständnis der projektiven Geometrie auch ein guter Ausgangspunkt für das Studiums der algebraischen Geometrie, eine der möglichen Vertiefungsrichtungen im Bachelor- und Master-Studium.

Das Ziel des Proseminars ist es, die Grundlagen der projektiven Geometrie zu verstehen und einige schöne Anwendungen wie den Satz von Pappus und die Sätze von Desargues, Pascal und Brianchon kennenzulernen. Weiter wollen wir Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel und Parabel) und ihre höherdimensionalen Analoga, die sogenannten Quadriken vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus verstehen und klassifizieren.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Bachelor Mathematik, Technomathematik und Mathematik Lehramt*. Grundkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Lineare Algebra I* werden vorausgesetzt, für die Vorträge 10 – 13 ist der parallele Besuch der Vorlesung *Lineare Algebra II* hilfreich.

Prüfungsmodalitäten

Prüfungsleistung (ohne Benotung): Seminarvortrag
Wiederholung der Prüfungsleistung bei Nichtbestehen: schriftliche Ausarbeitung

Anmeldung und Vortragsvergabe

Bitte melden Sie sich frühzeitig bei PAUL zu der Veranstaltung an. Gegen Mitte der Semesterferien werde ich die bis dahin angemeldeten Teilnehmer zu einer Vorbesprechung einladen, bei der die Vorträge verteilt werden. Falls Teilnehmer abspringen oder nach der Verteilung noch Vorträge übrig bleiben, können diese an Nachzügler vergeben werden.

Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Ziel des jeweiligen Vortragenden sollte es sein, den von ihm zu behandelnden Stoff selbst zu verstehen und ihn auch verständlich an die übrigen Seminarteilnehmer zu vermitteln.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit mir möglich. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgegelichen werden. Eine aktive und konstruktive Seminarteilnahme kann in der Vortragsnote positiv berücksichtigt werden.

Die Dauer der Vorträge soll 90 Minuten nicht überschreiten. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Die Vortragenden sollten sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit mir in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit mir durchzusprechen. Ich stehe darüber hinaus auch jederzeit für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag`

Zur Literatur

Die wichtigste Referenz für dieses Seminar ist das Buch *Analytische Geometrie* von Gerd Fischer [Fi85], das fast alle Inhalte des Seminars auf ausführliche und leicht verdauliche Weise behandelt. Für gelegentliche Ergänzungen verweisen wir auf das etwas ältere Buch *Lineare Algebra und analytische Geometrie* von Herrmann Schaal [Sc85]. Andere Bücher, wie etwa [BR04], [Sa88], [Pe75] decken ähnliche Inhalte ab. Auch wenn im Programm nicht explizit auf sie verwiesen wird, kann sich ein vergleichender Blick lohnen. In [Pa90] wird zusätzlich näher auf die Anwendung der projektiven Geometrie in der Computer-Graphik eingegangen. In [Be04], [Be09] werden noch viele andere Aspekte der projektiven Geometrie (z. B. der Standpunkt der algebraischen Geometrie und Topologie) behandelt, die in der modernen Mathematik von großer Bedeutung sind und über unser Seminarprogramm hinausgehen.

Kontakt

Malte Witte,
Universität Paderborn, D3.221
`malte.witte@math.uni-paderborn.de`,
Tel. +49-5251-60-2647

Vorträge

Vortrag 1: Affine Geometrie I

Laura Tepper 09.04.2015

Erklären Sie die Grundbegriffe der affinen Geometrie: Affine Räume und Unterräume, affine Abbildungen, Durchschnitt und Verbindung von affinen Unterräumen. Beweisen Sie die Dimensionsformel und diskutieren Sie den Begriff der Parallelität sowie die Parallelprojektion [Fi85, §1.1, S. 1–21].

Vortrag 2: Affine Geometrie II

Nadine Novian 16.04.2015

Definieren Sie affine Unabhängigkeit einer Familie von Punkten und affine Koordinaten. Erklären Sie, wie sich affine Abbildung nach Wahl von affinen Koordinaten mit Matrizen beschreiben lassen. Behandeln Sie das Teilverhältnis dreier Punkte auf einer Geraden und beweisen Sie die Invarianz des Teilverhältnisses unter Affinitäten. Wenden Sie diese Invarianz an, um drei einfache Sätze aus der Elementargeometrie zu beweisen [Fi85, §1.2, S. 21–31].

Vortrag 3: Projektive Räume und Unterräume

Denise Zeh 23.04.2015

Definieren Sie den Begriff des projektiven Raumes und erklären Sie, was ein projektiver Unterraum ist. Führen Sie projektive Koordinaten ein und behandeln Sie den projektiven Abschluss eines affinen Raumes. Definieren Sie Durchschnitt und Verbindung von projektiven Unterräumen und beweisen Sie die Dimensionsformel [Fi85, §3.1, S. 131–135].

Vortrag 4: Projektive Abbildungen und projektive Koordinaten

Lisa Habermann 30.04.2015

Definieren Sie den Begriff der projektiven Abbildung und den der Projektivität. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Affinitäten und Projektivitäten. Behandeln Sie den Begriff der projektiven Unabhängigkeit einer Familie von Punkten im projektiven Raum und führen Sie den Begriff der projektiven Basis ein [Fi85, §3.2.1–3.2.6, S. 135–143].

Vortrag 5: Gebrochen lineare Transformationen und Zentralprojektion

Marcel Jöstingmeier 07.05.2015

Erklären Sie, wie sich Projektivitäten nach Wahl eines Koordinatensystems durch gebrochen lineare Transformatinoen darstellen lassen. Führen Sie die Begriffe Zentralprojektion und Perspektivität ein und zeigen Sie, dass jede Zentralprojektion eine Projektivität ist. Interpretieren Sie Parallelprojektion aus der affinen Geometrie als eine spezielle Zentralprojektion im Rahmen der projektiven Geometrie [Fi85, §3.2.7–3.2.9, S. 143–149].

Vortrag 6: Das Doppelverhältnis

Kai Lübbesmeier 21.05.2015

Definieren Sie das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten im projektiven Raum und erklären Sie, wie diese Zahl nach Wahl von Koordinaten berechnet werden kann. Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis invariant unter Projektivitäten ist und schließen Sie daraus, dass die Definition des Doppelverhältnisses unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Erklären Sie weiter, wie Doppelverhältnis und (affines) Teilverhältnis zusammenhängen [Fi85, §. 3.3.1–3.3.4, S. 149–154]

Vortrag 7: Harmonische Punkte und Geometrie in der projektiven Ebene
Maria Nebeling 28.05.2015

Erklären Sie, wann zwei Punktepaare auf einer projektiven Geraden harmonisch liegen. Beweisen Sie anschließend den Satz vom vollständigen Vierseit und die Sätze von Desargues und Pappus. Erklären Sie die damit verbundenen Konstrukionsaufgaben in der Ebene [Fi85, §3.3.5–3.3.7, S. 154–157], [Sc85, §23, S. 217–227] (dort wird der Satz von Pappus als Satz von Pappus-Pascal bezeichnet).

Vortrag 8: Dualität
Marie-Theres Brem 11.06.2015

Erklären Sie den Begriff der Korrelation. Wiederholen Sie dann kurz den Begriff des Dualraums und definieren Sie den dualen projektiven Raum. Erklären Sie, wie man aus einer Semi-Projektivität vom projektiven Raum in sein Dual eine Korrelation erhält und zeigen Sie, dass alle Korrelationen auf diese Weise entstehen (Hauptsatz über Korrelationen) [Fi85, §3.4.1–3.4.6, S. 166–172].

Vortrag 9: Das Dualitätsprinzip
Michael Kismann 18.06.2015

Erklären Sie das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie. Beweisen Sie anschließend die Dualisierungen der Sätze vom vollständigen Vierseit (Satz vom vollständigen Viereck) und von Desargues und Pappus (Satz von Brianchon). Definieren Sie das Doppelverhältnis von Hyperebenen im projektiven Raum und erklären Sie, wie es sich als Doppelverhältnis von Punkten darstellen lässt [Fi85, §3.4.1–3.4.6, S. 166–172].

Vortrag 10: Projektive Quadriken
Jana Postma 25.06.2015

Führen Sie homogene Polynome und Nullstellenmengen ein und definieren Sie den Begriff der projektiven Quadrik. Diskutieren Sie den Spezialfall der projektiven Ebene und zeigen Sie, wie unterschiedliche Einbettungen der affinen Ebene Anlass zu den verschiedenen Typen von Kegelschnitten (Ellipse, Parabel, Hyperbel) geben. Zeigen Sie weiter, dass Quadriken unter Projektivitäten wieder auf Quadriken abgebildet werden [Fi85, §3.5.1–3.5.4, S. 176–183].

Vortrag 11: Projektive Hauptachsentransformation
Manuel Bastian Berkemeier 02.07.2015

Erklären Sie den Begriff der geometrischen Äquivalenz von Quadriken. Zeigen Sie dann, dass jede projektive Quadrik im reellen projektiven Raum geometrisch äquivalent zu einer Quadrik der Form

$$X_0^2 + \cdots + X_i^2 - X_{i+1}^2 - \cdots - X_n^2 = 0$$

ist. Diskutieren Sie Beispiele [Fi85, §3.5.5–3.5.8, S. 192–199].

Vortrag 12: Klassifikation der projektiven Quadriken
Simon Meyer-Ilse 09.07.2015

Zeigen Sie, dass die Quadriken im komplexen projektiven Raum bis auf geometrische Äquivalenz vollständig durch ihren Rang klassifiziert werden. Die Quadriken im reellen projektiven Raum werden durch Rang und Signatur klassifiziert. Erstellen Sie eine vollständige Liste der Äquivalenzklassen von Quadriken in der reellen projektiven Ebene und im dreidimensionalen reellen projektiven Raum. Illustrieren Sie diese durch Bilder [Fi85, §3.5.9–3.5.11, S. 192–199].

Vortrag 13: Die Sätze von Pascal und Brianchon
Simon Paege 16.07.2015

Formulieren und beweisen Sie den Satz von Pascal über Quadriken in der Ebene. Erklären Sie, warum der Satz von Pappus als Spezialfall des Satzes von Pascal aufgefasst werden kann (Fall einer ausgearteten Quadrik). Formulieren und beweisen Sie den dualen Satz zum Satz von Pascal, den Satz von Brianchon [Fi85, §3.5.12, S. 199–204], [Sc85, §24, S. 256–262].

Literatur

[Fi85] G. Fischer, *Analytische Geometrie*, Vieweg Studium; Grundkurs Mathematik bf 35 (1985), 4. Auflage

[Sc85] H. Schaal, *Lineare Algebra und analytische Geometrie, Band II*, Vieweg (1980).

[Be04] M. Berger, *Geometry I*, Springer; Universitext, (2004), 3. Auflage

[Be09] M. Berger, *Geometry II*, Springer; Universitext, (2009), 4. Auflage

[BR04] A. Beutelsbacher, U. Rosenbaum *Projektive Geometrie*, Vieweg Studium; Aufbaukurs Mathematik **41** (2004), 2. Auflage

[Sa88] P. Samuel, *Projective Geometry*, Springer; Undergraduate texts in mathematics (1988).

[Pe75] W. Pejas, *Projektive Geometrie*, Pädagogischer Verlag Schwann; Tutorial: Reine Mathematik (1975).

[Pa90] B. Paregis, *Analytische und projektive Geometrie für die Computer-Graphik*, Teubner (1990).