Übungen zur Analysis I WS 2005/2006 Wissens- und Verständnistest

Name/Vorname: ________________________________

Übungsleiter Analysis: ______________________________

Als angekreuzt gelten:	☒	und	■☒.
Als nicht angekreuzt gelten:	☐	und	■.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(1) Ist (x_n) eine alternierende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum x_n$.

IMMER ☐ ☐ MANCHMAL ☐ NIEMALS

MANCHMAL ist richtig: das Leibnizkriterium setzt zusätzlich voraus, dass $|x_n|$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Beispiel: $x_n = \frac{1}{n}$ für n gerade; $x_n = -2^{-n}$ für n ungerade; dann konvergiert die Reihe nicht.

(2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.

JA ☐ ☐ NEIN

JA!

(3) Die Folge (x_n) reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folge (x_n^2) konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

NEIN! Beispiel $x_n = (-1)^n$.

(4) Die Folge (x_n) positiver reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folge $(1/x_n)$ konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

NEIN! Beispiel: $x_n = n$ konvergiert nicht, aber $(1/x_n)$ konvergiert.

(5) Eine monotone Folge reeller Zahlen konvergiert.

☐ IMMER ☐ MANCHMAL ☐ NIEMALS

MANCHMAL! Nur wenn die Folge beschränkt ist, konvergiert sie. Beispiel siehe (4).

(6) Sei (x_n) eine Folge mit nicht verschwindenden Folgegliedern, dann ist (x_n^{-1}) eine Cauchyfolge.

☐ IMMER ☐ MANCHMAL ☐ NIEMALS

MANCHMAL! Beispiel $x_n = (-1)^n$.

(7) Ist (x_n) eine monoton steigende Folge von 0 verschiedener Zahlen, so ist (x_n^{-1}) stets eine monoton fallende Folge.

JA ☐ ☐ NEIN

NEIN! Sind die Anfangsglieder negativ, die späteren Glieder positiv, so ist die Folge (x_n^{-1}) nicht monoton fallend. Haben alle Folgenglieder dasselbe Vorzeichen, so ist die Implikation aber richtig.

(8) Es gibt eine Cauchyfolge (a_n) rationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{3}$ konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

JA! Beispiele wurden in Aufgabe 8) und in den Aufgabe 12) und 14 diskutiert.

(9) Für eine reelle Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $0 < x_n < \frac{1}{n^2}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot x_n$.

☐ IMMER ☐ MANCHMAL ☐ NIEMALS

IMMER! Majorantenkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

(10) Jede Reihe mit positiven Summanden konvergiert absolut.

JA ☐ ☐ NEIN

NEIN: wenn die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist (Beispiel $a_n = 1$), so konvergiert die Reihe nicht.

(11) Die Folge der Partialsummen einer konvergenten Reihe ist stets

☐ eine beschränkte Folge ☐ eine Cauchyfolge

☐ eine monotone Folge ☐ eine Nullfolge

Die Folge der Partialsummen ist stets **eine beschränkte Folge** und **eine Cauchyfolge**.

(12) Aus $|x_n| \leq C_n$ und $\sum C_n < \infty$ folgt die absolute Konvergenz der Reihen $\sum x_n$ und $\sum C_n$.

JA ☐ ☐ NEIN

JA! Das ist das Majorantenkriterium!

(13) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Ergänze Sie die Zeichen $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ bzw. $\not\Leftrightarrow$ (letzteres wenn ohne zusätzliche Voraussetzungen in keiner Richtung eine Implikation besteht):

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\underline{\quad\Rightarrow\quad}$ (a_n) ist Nullfolge;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\underline{\quad\Leftarrow\quad}$ $((-1)^n a_n)$ ist monoton fallende Nullfolge;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\underline{\quad\Leftrightarrow\quad}$ $(\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n\geq 0}$ ist eine Cauchyfolge

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\underline{\quad\Leftarrow\quad}$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\underline{\quad\not\Leftrightarrow\quad}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert;

(14) Eine divergente Reihe mit positiven Summanden lässt sich so umordnen, dass sie konvergiert.

☐ IMMER ☐ MANCHMAL ☐ NIEMALS

NIEMALS: wäre eine Umordnung konvergent, so wäre sie absolut konvergent, da die Summanden positiv sind. Dann müsste nach dem Umordnungssatz aber auch die Ausgangsreihe konvergieren.

(15) Wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert, dann auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n^3}$.

JA ☐ ☐ NEIN

JA! Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert, bilden die Folgenglieder eine Nullfolge, insbesondere eine beschränkte Folge: $|\frac{a_n}{n}| \leq C$. Dann ist aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n^3}$.

(16) Es gilt: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n =$

☐ 1 ☐ e^{-1} ☐ e^{-2} ☐ e^{-3}

1 ist richtig (Aufgabe 28 (c)). Das zeigt man mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung.

(17) Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 3, x \geq 0\}$ besitzt

☐ ein Minimum in $\mathbb{R}$ ☐ ein Infimum in $\mathbb{Q}$

☐ eine untere Schranke in $\mathbb{Q}$ ☐ ein Supremum in $\mathbb{R}$

M besitzt eine untere Schranke in $\mathbb{Q}$ z.B. $\frac{17}{10}$. Das Infimum von M ist $\sqrt{3}$ und liegt nicht in $\mathbb{Q}$ und damit auch nicht in M. Damit hat M auch kein Minimum. Da M keine obere Schranke besitzt, hat es auch kein Supremum.

(18) Die Abbildung $\phi : K^* \to K^*, x \mapsto x^2$ mit $K^* = K\backslash\{0\}$ ist

☐ für jeden Körper K ein Homomorphismus

☐ für $K = \mathbb{C}$ injektiv ☐ für $K = \mathbb{Q}$ surjektiv

☐ für $K = \mathbb{R}$ surjektiv ☐ für $K = \mathbb{C}$ surjektiv

☐ für keinen angeordneten Körper K injektiv

Die erste Frage ist ein wenig unklar: Gemeint ist hier ein Homomorphismus bezüglich der Struktur von K^* als Gruppe bezüglich der Multiplikation. Denn die Multiplikation ist die einzige Verknüpfung, die auf K^* definiert ist. Bei dieser Interpretation ist ϕ stets ein Homomorphismus wegen $(xy)^2 = x^2 \cdot y^2$.

Die Abbildung $x \mapsto x^2$ ist allerdings kein Homomomorphismus als Abbildung von K nach K bezüglich der Verknüpfung Addition, sofern $2 \neq 0$ gilt.

ϕ ist weder für $K = \mathbb{C}$ noch für irgendeinen angeordneten Körper injektiv, denn in beiden Fällen gilt $+1 \neq -1$, aber $\phi(+1) = 1 = \phi(-1)$.

ϕ ist surjektiv für $K = \mathbb{C}$ surjektiv (Aufgabe 17(b)), aber nicht für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$, da dann $-1 \notin \phi(K^*)$ gilt.

(19) Bestimme alle Lösungen von $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$. $\underline{\{1, -1, i, -i \qquad \}}$ (2 Punkte)

(20) Ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ ist genau dann reell, wenn z^{-1} reell ist.

JA ☐ ☐ NEIN

JA! Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, liegt mit jedem $z \in \mathbb{R}, z \neq 0$ auch z^{-1} in $\mathbb{R}$. Da das inverse im Körper $\mathbb{C}$ eindeutig bestimmt ist, hat ein Element $z \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$ in $\mathbb{R}$ dasselbe Inverse wie in $\mathbb{C}$. Ist $z^{-1} \in \mathbb{R}$, so folgt aus dem gleichen Grund $z = (z^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}$.

(21) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x^2 = 123456789876543$ in $\mathbb{Q}$?

☐ gar keine	☐ zwei
☐ eine	☐ unendlich viele

gar keine: da Quadrate ganzer Zahlen bei Division durch 5 den Rest $0, 1$ oder 4 haben, hat die Gleichung keine Lösungen in $\mathbb{Z}$. Nach Aufgabe 7 hat sie dann auch keine Lösungen in $\mathbb{Q}$.

Bewertung: Alle Aufgaben außer 11, 13, 17, 18, 19: Richtiges Kreuz: 1 Punkt, falsches Kreuz: -1 Punkt, kein Kreuz: 0 Punkte

Bei Aufgaben (11), (17) oder (18):
alle Kreuze richtig: 4 Punkte (11 und 17) bzw. 6 Punkte (18).
Pro Fehler (falsches oder fehlendes Kreuz): 2 Punkte weniger
Jedoch mindestens 0 Punkte, auch wenn alles falsch gemacht wurde.

Aufgabe 13: 1 Punkt für jeden richtigen Pfeil, 0 Punkte für falsche Pfeile