Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 9

Abgabe bis Di 22.06.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 26) Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g(X)$ bzw. $g(Y)$. Zeige:

(a) Gilt $g(X) = 0$, so ist auch $g(Y) = 0$.

(b) Gilt $g(X) = 1$, so ist $g(Y) = 0$ oder $g(Y) = 1$.

(c) Gilt $g(X) = g(Y) = 1$, so ist f eine Überlagerung.

Hinweis: Sie dürfen bei Anwendung der Hurwitz-Formel benutzen, dass $g(X)$ und $g(Y)$ natürliche Zahlen sind.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 27) Für natürliche Zahlen $m, n \geq 1$ mit größtem gemeinsamen Teiler γ zeige man, dass die zur Polynomgleichung $z^n + w^m - 1 = 0$ gehörende kompakte Riemannsche Fläche X das Geschlecht

$$g(X) \quad = \quad \frac{(n-1)(m-1) - (\gamma - 1)}{2} \qquad \text{hat.}$$

(5 Punkte, der Spezialfall $m = n$ bringt 3 Punkte)

Aufgabe 28) (a) Für $k \geq 3$ und $z \in \mathbf{H}$ zeige man, dass die Reihe

$$E_k(z) \;=\; \sum_{(\gamma,\delta)\in\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(\gamma z + \delta)^k}$$

absolut und lokal gleichmäßig gegen eine in $\mathbf{H}$ holomorphe Funktion konvergiert.

(b) Zeige: für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $z \in \mathbf{H}$ gilt:

$$E_k(Mz) \quad = \quad (cz+d)^k \cdot E_k(z).$$

(c) Folgere daraus: E_k ist für ungerades k die Nullfunktion;

$E_k(i) = 0$, falls k nicht durch 4 teilbar ist;

$E_k(\rho) = 0$, falls k nicht durch 6 teilbar ist.

(d) Zeige, dass $\lim_{y\to\infty} E_k(iy) = 2\zeta(k)$ für gerades $k \geq 4$ gilt.

(e) Zeige: für die auf $\mathbf{H}$ meromorphe Funktion $Q_k(z) = \frac{E_k'(z)}{E_k(z)}$ und $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$(cz+d)^{-2} \cdot Q_k(Mz) = \frac{c \cdot k}{(cz+d)} + Q_k(z).$$

(7=2+2+1+1+1 Punkte)