Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 8

Abgabe bis Di 15.06.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 23) Wie in Aufgabe 6) werde

$$X \quad = \quad \left\{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; w^2 = f(z) \right\},$$

mit der Struktur einer Riemannschen Fläche versehen, wobei

$$f(z) \quad = \quad (z-a_1) \cdot \ldots \cdot (z-a_n) \qquad \text{und}$$

die $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedenen seien ($n \geq 1$).

(a) Zeige, dass es $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, ein Polynom $g(y) = (y-b_1) \cdot \ldots \cdot (y-b_\nu)$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $b_1, \ldots, b_\nu$ und $c \in \mathbb{C}^*$ gibt, so dass

$$g(y) = c^2 \cdot y^{2m} \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{C}^* \quad \text{ist.}$$

(b) Versieht man $Y = \{(y,v) \in \mathbb{C}^2 \mid v^2 = g(z)\}$ ebenfalls mit der Struktur einer Riemannschen Fläche wie in Aufgabe 6), so zeige man die Existenz einer kompakten Riemannschen Fläche Z zusammen mit einer offenen Überdeckung $Z = X_1 \cup Y_1$ und zwei biholomorphen Abbildungen $\phi : X \to X_1$, $\psi : Y \to Y_1$, so dass $\phi^{-1} \circ \psi$ von der Form

$$(y,v) \quad \mapsto \quad \left(\frac{1}{y}, \frac{v}{c \cdot y^m} \right) \qquad \text{für } (y,v) \in Y, y \neq 0 \text{ ist.}$$

(c) Zeige, dass sich die Projektion $p = \pi_1 \circ \phi^{-1} : \; X_1 \to \mathbb{C},\; \phi(z,w) \mapsto z$ zu einer surjektiven holomorphen Abbildung π von Z auf die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt.

(5=2+2+1 Punkte)

Aufgabe 24) In den Bezeichnungen der Aufgaben 6) und 2) zeige man, dass durch

$$\begin{array}{cccc} \eta_U : & \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) & \to & \mathcal{O}_X(\pi_1^{-1}(U)) = \pi_{1*}\mathcal{O}_X(U) \\ & (f_1, f_2) & \mapsto & f_1 \circ \pi_1 + \pi_2 \cdot (f_2 \circ \pi_1) \end{array}$$

für $U \subset \mathbb{C}$ offen ein Isomorphismus von Garben $\eta : \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \pi_{1*}\mathcal{O}_X$ definiert wird.

Hinweis: Zeige, dass η_U für geeignete U, die zusammen $\mathbb{C}$ überdecken, ein Isomorphismus ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 25) (a) Zeige, dass es für

$$X' = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; w^2 = z^2 \cdot (z+1) \right\}$$

eine endliche Teilmenge $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ und eine biholomorphe Abbildung

$$\phi : \hat{\mathbb{C}} - E \quad \to \quad X' - \{(0,0)\} \quad \text{gibt.}$$

(b) Zeige dieselbe Aussage für $X'' = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z^3\}$.

(c) Zeige, dass $X''' = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = 1 - z^2\}$ zu $\mathbb{C}^*$ biholomorph äquivalent ist.

(6=2+2+2 Punkte)