Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 7

Abgabe bis Di 08.06.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 20) (a) Für eine natürliche Zahl $N \geq 1$ zeige man, dass

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| \, a-1, c, d-1 \text{ sind durch } N \text{ teilbar} \right\}$$

eine Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ und dass

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| \, a-1, b, c, d-1 \text{ sind durch } N \text{ teilbar} \right\}$$

ein Normalteiler von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist.

(b) Die Operation einer Gruppe Γ auf einer Menge X heißt *fixpunktfrei*, wenn für jedes $x \in X$ aus $\gamma x = x$ folgt, dass $\gamma = 1$ ist. Zeige, dass für $N \geq 4$ die Gruppe $\Gamma_1(N)$ und für $N \geq 3$ die Gruppe $\Gamma(N)$ fixpunktfrei auf $\mathbf{H}$ operiert.
Hinweis: Aufgabe 9(a)

(c) Zeige: ist $z \in \mathbf{H}$ ein Fixpunkt von $\gamma \in \Gamma_1(3)$ mit $\gamma \neq 1$, so gibt es $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $z = \delta\rho$, wobei $\rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

(5=2+2+1 Punkte)

Aufgabe 21) Für $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{H}$ und $\epsilon > 0$ sei

$$U_\epsilon(z_0) = \left\{ z = x + iy \in \mathbf{H} \middle| \, x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon, \quad \frac{y_0}{1+\epsilon} \leq y \leq (1+\epsilon) y_0 \right\}.$$

(a) Zeige: für $\epsilon > 0$ und $z_0, z_1 \in \mathbf{H}$ gibt es nur endlich viele $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma U_\epsilon(z_0) \cap U_\epsilon(z_1) \neq \emptyset$. (*Hinweis:* Aufgabe 5))

(b) Folgere, dass die Operation von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbf{H}$ die Bedingung 2) in der Definition einer freien Operation erfüllt.

(c) Folgere aus (a), dass es für jedes $z \in \mathbf{H}$ eine offene Umgebung U_z gibt, so dass für $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ gilt: Aus $\gamma(U_z) \cap U_z \neq \emptyset$ folgt $\gamma z = z$.

(d) Zeige: ist die Operation einer Untergruppe Γ von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbf{H}$ fixpunktfrei, so ist sie frei.

(7=2+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 22) Die Gruppe $Z_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^* | \ \zeta^n = 1\}$ operiert auf $\mathbb{C}$ durch $(\zeta, z) \mapsto \zeta \cdot z$.

(a) Zeige: diese Operation erfüllt die Bedingung 2) in der Definition einer freien Operation, aber für $n \geq 2$ nicht die Bedingung 1).

(b) Zeige: der Quotient $\mathbb{C}/Z_n$ ist zu $\mathbb{C}$ homöomorph.

(4=2+2 Punkte)