Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 6

Abgabe bis Di 01.06.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 17) Für $\tau \in \mathbf{H}$ bezeichne $X_\tau = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ mit $\Gamma_\tau = \{m+n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$ die in Aufgabe 13) konstruierte Riemannsche Fläche.

(a) Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ sei $\tau' = M\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \in \mathbf{H}$. Zeige, dass durch

$$\phi : X_\tau \rightarrow X_{\tau'}, \qquad z + \Gamma_\tau \mapsto \frac{z}{c\tau + d} + \Gamma_{\tau'}$$

eine biholomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen (wohl)definiert wird.

(b) Sei jetzt $\tau = \sqrt{-\delta} \in \mathbf{H}$ mit $\delta \in \mathbb{N}, \delta \neq 0$. Zeige, dass für $\omega = m + n\tau \in \Gamma_\tau,\ \omega \neq 0$ durch

$$\Omega : X_\tau \rightarrow X_\tau, \qquad z + \Gamma_\tau \mapsto \omega z + \Gamma_\tau$$

eine Überlagerung von Riemannschen Flächen (wohl)definiert wird, bei der jeder Punkt genau $N(\omega) = m^2 + n^2\delta$ Urbilder hat.

(6=3+3 Punkte)

Aufgabe 18) Für $\tau \in \mathbf{H}$ sei $q = e^{2\pi i\tau}$ und $Y_\tau = \mathbb{C}^*/\sim$, wobei genau dann $z_1 \sim z_2$ ist, wenn es $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z_1 = q^k \cdot z_2$. Wir versehen Y_τ mit der Quotiententopologie.

(a) Zeige, dass die kanonische Projektion $p : \mathbb{C}^* \rightarrow Y_\tau$ eine Überlagerung ist.

(b) Konstruiere auf Y_τ einen holomorphen Atlas, so dass p holomorph und lokal biholomorph ist.

(c) Zeige, dass Y_τ zu X_τ aus Aufgabe 17) biholomorph äquivalent ist.

(5=2+1+2 Punkte)

Aufgabe 19) Die Mannigfaltigkeit X besitze eine Überdeckung $X = U_1 \cup U_2$, so dass U_1 und U_2 homöomorph zu sternförmigen Teilmengen V_1 und V_2 des $\mathbb{R}^n$ sind und so dass $U = U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend ist. Sei $x_0 \in U$.

(a) Zeige, dass es für jeden geschlossenen Weg $\gamma : I \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ endlich viele Punkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2k} = 1$ gibt, so dass $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ für gerades i in U_1 und für ungerades i in U_2 enthalten ist.

(b) Folgere, dass X einfach zusammenhängend ist.

(c) Zeige, dass die Riemannsche Zahlenkugel einfach zusammenhängend ist.

(5=2+2+1 Punkte)