Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 5

Abgabe bis Di 25.05.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 14) Für einen Weg $\gamma : I \to X$ und $s, t \in I = [0,1]$ bezeichne $\gamma_s : I \to X$ den Weg $r \mapsto \gamma(sr)$ sowie $\delta_{s,t} : I \to X$ den Weg $r \mapsto \gamma(s+r(t-s))$. Zeige, dass die Wege γ_t und $\gamma_s \circ \delta_{s,t}$ homotop sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 15) Für einen Weg $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ bezeichne $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{C}$ eine Liftung von γ bezüglich der Überlagerung $p : z \mapsto exp(z) = e^{2\pi i z}$.

(a) Zeige, dass $n(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ eine ganze Zahl ist, die nur von der Homotopieklasse $\gamma/\sim \; \in \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ abhängt.

(b) Zeige, dass $\gamma/\sim \; \mapsto \; n(\gamma)$ einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \tilde{\to} \mathbb{Z}$ liefert.

(c) Falls $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$ stückweise glatt ist, zeige man, dass $n(\gamma)$ mit der Umlaufzahl $N(\gamma, 0)$ übereinstimmt.

(7=2+3+2 Punkte)

Aufgabe 16) (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ eine Polynomfunktion ($n \geq 1$). Zeige, dass es $R \geq 0$ gibt, so dass mit

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| > R\} \quad \text{und } U_R = f^{-1}(D_R)$$

die Restriktion von f auf U_R eine Überlagerung $\tilde{f} : U_R \to D_R$ ist.

Was ist das kleinstmögliche R?

(b) Sei $\rho > 0$ so groß, dass der Weg $\gamma : I \to \mathbb{C}, r \mapsto \rho \cdot e^{2\pi i r}$ ganz in U_R verläuft. Bestimme in den Bezeichnungen der Aufgabe 15) die Zahl $n(f \circ \gamma)$.

(6=4+2 Punkte)