Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2   SS 10   Blatt 4

Abgabe bis Di 18.05.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 11) (a) Zeige, dass $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$ eine universelle Überlagerung der Riemannschen Fläche $\mathbb{C}^*$ ist. Wie sieht die Gruppe der Decktransformationen aus?

(b) Für $0 \leq r < R \leq \infty$ sei $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$. Bestimme $S_{r,R} = exp^{-1}(D_{r,R})$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ und zeige, dass die Einschränkung von exp auf $S_{r,R}$ eine universelle Überlagerung von $D_{r,R}$ liefert.

(c) Für $c > 0$ zeige man, dass $D_{cr,cR}$ zu $D_{r,R}$ biholomorph äquivalent ist.

(d) Im Fall $0 < r < R < \infty$ gebe man eine biholomorphe Abbildung $\phi : S_{r,R} \to \mathbf{H}$ der Form $z \mapsto e^{az+b}$ an mit geeigneten $a, b \in \mathbb{C}$. Welche Automorphismen α der oberen Halbebene $\mathbf{H}$ entsprechen dabei den Decktransformationen? Bestimme $Spur(\alpha)$, wenn α durch eine Möbiustransformation in $SL_2(\mathbb{R})$ beschrieben wird und die Gruppe der Decktransformationen erzeugt.

(8=3+2+1+2 Punkte)

Bemerkung: Eine universelle Überlagerung ist eine (unverzweigte) Überlagerung $p : X \to Y$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass X zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Decktransformationen sind Homöomorphismen $\phi : X \to X$ mit der Eigenschaft $p \circ \phi = p$.

Aufgabe 12) Seien X_1, X_2 Riemannsche Flächen, die beide $\mathbf{H}$ als universelle Überlagerung haben. Die Gruppe der Decktransformationen werde von α_1 bzw. $\alpha_2 \in SL_2(\mathbb{R})$ erzeugt. Zeige: wenn $Spur(\alpha_1) \neq Spur(\alpha_2)$ gilt, dann sind X_1 und X_2 nicht biholomorph äquivalent.

(2 Punkte)

Aufgabe 13) Für $\tau \in \mathbf{H}$ sei $\Gamma = \{m+n\tau \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ und $X = \mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $z \sim w \iff z - w \in \Gamma$. Sei $\pi : \mathbb{C} \to X$ die kanonische Projektion. Auf X betrachten wir die Quotiententopologie, d.h. $U \subset X$ ist genau dann in X offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ in $\mathbb{C}$ offen ist.

(a) Zeige, dass X separiert ist.

(b) Zeige: es gibt $r = r(\tau) > 0$, so dass für jedes $\epsilon \leq r$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ die Einschränkung von π auf den offenen Ball $B_{z,\epsilon} = \{w \in \mathbb{C} | \, |w - z| < \epsilon\}$ einen Homöomorphismus $\pi_{z,\epsilon}$ auf das Bild $\pi(B_{z,\epsilon})$ liefert.

(c) Zeige, dass die Abbildungen $\pi_{z,\epsilon}^{-1} : \pi(B_{z,\epsilon}) \to B_{z,\epsilon}$ für $\epsilon \leq r$ und $z \in \mathbb{C}$ einen holomorphen Atlas bilden. X bekommt dadurch die Struktur einer Riemannschen Fläche.

(d) Zeige, dass $\pi : \mathbb{C} \to X$ eine universelle Überlagerung ist und bestimme die Gruppe der Decktransformationen.

(6=1+2+1+2 Punkte)