Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 3

Abgabe bis Di 11.05.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 7) Seien X, Y Riemannsche Flächen und $g_1, g_2 : Y \to X$ zwei holomorphe Abbildungen, die auf $A \subset Y$ übereinstimmen. A habe in Y einen Häufungspunkt. Zeige $g_1 = g_2$.

(2 Punkte)

Aufgabe 8) Sei $g : Y \to X$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zeige: Ist Y kompakt, dann ist g surjektiv und X ebenfalls kompakt.

(4 Punkte)

Aufgabe 9) (a) Zeige: eine Matrix $A \in SL_2(\mathbb{R})$ mit $A \neq \pm E$ hat genau dann einen Fixpunkt in $\mathbf{H}$, wenn $|Spur(A)| < 2$ gilt.

(b) Zeige in den Bezeichnungen von Aufgabe 5), dass bei festem $z \in \mathbf{H}$ das nach 5(c) existierende Element $M(z) \in D$ eindeutig bestimmt ist.

(c) Bestimme für $z \in D$ die Fixgruppe $\Gamma_z = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma(z) = z\}$.

(Unterscheide die Fälle $z = i$, $z = \rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und sonstige $z \in D$.)

(5=1+2+2 Punkte)

Aufgabe 10) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von 0 und $f : U \to U$ holomorph mit $f(0) = 0$. Sei $f^{\{k\}}$ die k-fache Komposition von f mit sich selbst, also $f^{\{0\}} = id_U$ und $f^{\{k+1\}} = f \circ f^{\{k\}}$. Wir nehmen an: $f^{\{n\}} = id_U$ für ein $n > 0$.

(a) Zeige, dass $f'(0)$ eine n-te Einheitswurzel ζ ist (d.h. $\zeta^n = 1$).

(b) Zeige: die Abbildung

$$h : U \to \mathbb{C}, \quad h(z) = z \cdot f(z) \cdot f^{\{2\}}(z) \cdot \ldots \cdot f^{\{n-1\}}(z)$$

hat eine Nullstelle n-ter Ordnung in 0 und erfüllt die Gleichung $h \circ f = h$.

(c) Sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit $g^n(z) = h(z)$ (vgl. Beweis des Satzes von der Gebietstreue). Zeige, dass g in einer Umgebung $V \subset U$ von 0 biholomorph ist und dort die Beziehung $g(f(z)) = \zeta \cdot g(z)$ gilt, so dass die Abbildung $g \circ f \circ g^{-1}$ in $g(V)$ von der Form $z \mapsto \zeta \cdot z$ ist.

(5=1+1+3 Punkte)