

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

## Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 3

Abgabe bis Di 11.05.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

**Aufgabe 7)** Seien  $X, Y$  Riemannsche Flächen und  $g_1, g_2 : Y \rightarrow X$  zwei holomorphe Abbildungen, die auf  $A \subset Y$  übereinstimmen.  $A$  habe in  $Y$  einen Häufungspunkt. Zeige  $g_1 = g_2$ .

(2 Punkte)

**Aufgabe 8)** Sei  $g : Y \rightarrow X$  eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zeige: Ist  $Y$  kompakt, dann ist  $g$  surjektiv und  $X$  ebenfalls kompakt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 9)** (a) Zeige: eine Matrix  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  mit  $A \neq \pm E$  hat genau dann einen Fixpunkt in  $\mathbf{H}$ , wenn  $|Spur(A)| < 2$  gilt.

(b) Zeige in den Bezeichnungen von Aufgabe 5), dass bei festem  $z \in \mathbf{H}$  das nach 5(c) existierende Element  $M(z) \in D$  eindeutig bestimmt ist.

(c) Bestimme für  $z \in D$  die Fixgruppe  $\Gamma_z = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma(z) = z\}$ .

(Unterscheide die Fälle  $z = i$ ,  $z = \rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$  und sonstige  $z \in D$ .)

(5=1+2+2 Punkte)

**Aufgabe 10)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Umgebung von 0 und  $f : U \rightarrow U$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Sei  $f^{\{k\}}$  die  $k$ -fache Komposition von  $f$  mit sich selbst, also  $f^{\{0\}} = id_U$  und  $f^{\{k+1\}} = f \circ f^{\{k\}}$ . Wir nehmen an:  $f^{\{n\}} = id_U$  für ein  $n > 0$ .

(a) Zeige, dass  $f'(0)$  eine  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  ist (d.h.  $\zeta^n = 1$ ).

(b) Zeige: die Abbildung

$$h : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = z \cdot f(z) \cdot f^{\{2\}}(z) \cdot \dots \cdot f^{\{n-1\}}(z)$$

hat eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung in  $0$  und erfüllt die Gleichung  $h \circ f = h$ .

(c) Sei  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Abbildung mit  $g^n(z) = h(z)$  (vgl. Beweis des Satzes von der Gebietstreue). Zeige, dass  $g$  in einer Umgebung  $V \subset U$  von  $0$  biholomorph ist und dort die Beziehung  $g(f(z)) = \zeta \cdot g(z)$  gilt, so dass die Abbildung  $g \circ f \circ g^{-1}$  in  $g(V)$  von der Form  $z \mapsto \zeta \cdot z$  ist.

(5=1+1+3 Punkte)