Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 2

Abgabe bis Di 04.05.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 4) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$ endlich, $U = D - S$ und

$$R : \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}^n, \quad f \mapsto (Res_{z_1}(f), \ldots, Res_{z_n}(f)) .$$

(a) Zeige, dass die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}(U) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(U) \xrightarrow{R} \mathbb{C}^n \to 0$$

exakt ist.

(b) Zeige, dass die folgende Sequenz wohldefiniert und exakt ist, wobei $\rho(f) = R(\frac{f'}{f})$ und $exp(f) : z \mapsto e^{2\pi i f(z)}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}(U) \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^*(U) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}^n \to 0$$

(6=3+3 Punkte)

Aufgabe 5) (a) Für $z \in \mathbf{H}$ und $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ zeige man:

$$Im\,(M(z)) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}.$$

(b) Zeige: Für $z \in \mathbf{H}$ und $c_0 > 0$ gibt es nur endlich viele Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $|cz + d|^2 \leq c_0$.

(c) Sei

$$D = \left\{ z \in \mathbf{H} \,\middle|\, -\frac{1}{2} < Re(z) \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1,\ |z| > 1 \text{ falls } Re(z) < 0 \right\}$$

Zeige, dass es für jedes $z \in \mathbf{H}$ ein $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $M(z) \in D$.

Anleitung: Folgere aus (a) und (b), dass man in der Menge $\{M(z)|M \in SL_2(Z)\}$ ein Element mit maximalem Imaginärteil wählen kann. Dabei kann der Realteil wegen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ o.B.d.A im Intervall $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ angenommen werden. Mit Hilfe von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ zeige man dann die Behauptung.

(5=1+1+3 Punkte)

Aufgabe 6) Für paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a_1) \cdot \ldots \cdot (z-a_n) \qquad \text{und} \\ X &= \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; w^2 = f(z)\right\}, \end{aligned}$$

versehen mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Begründe, dass X separiert und zusammenhängend ist.

Seien $\pi_1 : (z,w) \mapsto z$ und $\pi_2 : (z,w) \mapsto w$ die Koordinatenprojektionen.

Zeige, dass es für jeden Punkt $x \in X$ eine in X offene Umgebung U_x und ein $j \in \{1,2\}$ gibt, so dass $\phi_x = \pi_j$ ein Homöomorphismus von U_x auf eine offene Kreisscheibe $V_x \subset \mathbb{C}$ ist.

Zeige, dass die (U_x, ϕ_x, V_x) $(x \in X)$ einen Atlas bilden, so dass X die Struktur einer Riemannschen Fläche bekommt.

(5 Punkte)