Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 12

Abgabe bis Di 13.07.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 37) Für $\tau \in \mathbf{H}$ sei $X = X_\tau$ die in Aufgabe 13) konstruierte Riemannsche Fläche. Berechne $H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z}_X)$ bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U} = (U_0, U_1, U_2)$ mit $U_i = \pi(V_i)$ und

$$V_i \quad = \quad \left\{ x + y\tau \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{i}{3} \;<\; x, y \;<\; 1 + \frac{i}{3} \right\} \qquad \text{für } i = 0, 1, 2.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 38) Konstruiere in den Bezeichnungen von Aufgabe 23) und 34) einen Isomorphismus:

$$\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{-m} \quad \tilde{\to} \quad \pi_* \mathcal{O}_Z.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 39) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X.

(a) Sei $\mathcal{V}$ eine Überdeckung von Y und $\mathcal{U}$ die aus allen $f^{-1}(V)$ für $V \in \mathcal{V}$ bestehende Überdeckung von X. Zeige, dass man einen Isomorphismus hat:

$$H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \quad \tilde{\to} \quad H^1_{\mathcal{V}}(Y, f_*(\mathcal{G})).$$

Welche Folgerung ergibt sich daraus mit Hilfe der Aufgaben 34) und 38) für $H^1_{\mathcal{U}}(Z, \mathcal{O}_Z)$, wenn $\mathcal{U}$ die in Aufgabe 23) konstruierten Überdeckung der kompakten Riemannschen Fläche Z bezeichnet?

(b) Folgere aus (a) die Existenz eines injektiven Homomorphismus:

$$\phi : H^1(Y, f_*(\mathcal{G})) \quad \to \quad H^1(X, \mathcal{G}).$$

(3=2+1 Punkte)

Aufgabe 40) Für $N \geq 1$ sei $Y(N)$ der Quotient von $\mathbf{H}$ nach der Operation der Gruppe $\Gamma(N)$ aus Aufgabe 20). $Y(1)$ werde mit der Struktur einer Riemannschen Fläche so versehen, dass $J : Y(1) \to \mathbb{C}$ aus Aufgabe 33)(c) biholomorph ist. $Y(N)$ für $N \geq 3$ trägt als Quotient nach einer freien Operation die Struktur einer Riemannschen Fläche.

(a) Zeige, dass für $N \geq 3$ die kanonische Projektion $\pi_N : Y(N) \to Y(1)$ eine holomorphe verzweigte Überlagerung mit Überlagerungsgrad

$$d = \frac{1}{2} \cdot \#(SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N))$$

ist, die nur über den Klassen von i und ρ verzweigt ist, wobei in diesen Punkten alle Verzweigungsindizes gleich 2 bzw. 3 sind.

(b) Sei $X(1) = Y(1) \cup \{\infty\}$ eine kompakte Riemannsche Fläche, so dass die meromorphe Funktion J eine biholomorphe Abbildung auf die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ liefert. Zeige dass sich $Y(N)$ durch Hinzufügen endlich vieler Punkte zu einer kompakten Riemannschen Fläche $X(N)$ erweitern lässt, die eine verzweigte Überlagerung von $X(1)$ ist. Zeige, dass alle Punkte über ∞ den Verzweigungsindex N haben.

Anleitung: Man gehe wie bei der Konstruktion der einer Polynomgleichung zugeordneten Riemannschen Fläche vor. Zeige: Ist $\gamma : \mathbb{R} \to Y(N)$ ein Weg, der den Weg $t \mapsto \{Klasse\ von\ 2i + t\} \in Y(1)$ liftet, so gilt $\gamma(t) = \gamma(s)$ genau dann, wenn $t - s$ ein ganzzahliges Vielfaches von N ist.

(c) Zeige, dass $X(N)$ das Geschlecht

$$g_N = 1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{d}{2} \qquad \text{hat.}$$

Man kann zeigen, dass $d = \frac{1}{2} \cdot \#(SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ gilt und dass im Falle einer Primzahl $N = p$ weiterhin $d = \frac{(p-1)p(p+1)}{2}$ ist. Berechne mit dieser Information g_3, g_5, g_6 und g_7.

(6=2+3+1 Punkte)