Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 11

Abgabe bis Di 06.07.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6

Aufgabe 33) Zeige in den Bezeichnungen der Aufgaben 5(c), 31) und 32):

(a) die Funktion $G(z) = 49E_6^2 - 20E_4^3$ hat in ∞ die Ordnung 1 und ist in $\mathbf{H}$ holomomorph ohne Nullstellen;

(b) Für $c \neq 20$ hat $49E_6^2 - cE_4^3$ genau eine Nullstelle in D;

(c) $J = \frac{E_4^3}{G} : \mathbf{H} \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion, die einen Homöomorphismus $\mathbf{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ induziert, und J ist in allen Punkten $z \in D - \{i, \rho\}$ lokal biholomorph.

(Hinweis: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.)

(5=1+1+3 Punkte)

Aufgabe 34) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{G}_n$ diejenige Garbe auf $\hat{\mathbb{C}}$, für die $\mathcal{G}_n(U)$ aus allen Funktionen besteht, die in $U - \{\infty\}$ holomorph sind und die außerdem im Fall $\infty \in U$ in ∞ meromorph mit $ord_\infty(f) \geq -n$ sind.

Berechne $H^1_{\mathcal{U}}(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{G}_n)$ bezüglich der Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$ durch die offenen Mengen $U_1 = \mathbb{C}, U_2 = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 35) (a) Zeige in den Bezeichnungen des Skripts (S. 24), dass die Kohomologieklasse $\delta(h) \in H^1(X, \mathcal{F})$ von der Wahl der Überdeckung und von der Wahl der g_i unabhängig ist.

(b) Zeige die Exaktheit der langen (exakten) Kohomologiesequenz an der Stelle $H^1(X, \mathcal{G})$.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 36) Sei $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ eine reell beliebig oft differenzierbare komplexwertige Funktion mit kompaktem Träger. Setze für $w \in \mathbb{C}$:

$$f(w) \quad = \quad \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(w + r \cdot e^{i\phi}) \cdot e^{-i\phi} \, d\phi \, dr.$$

(a) Zeige für $r > 0$:

$$e^{-i\phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \left(g(w + re^{i\phi}) \right) \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(g(w + re^{i\phi}) \right) + \frac{i}{2r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(g(w + re^{i\phi}) \right),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(w) + i \frac{\partial f}{\partial v}(w) \right)$ für $w = u + iv$.

(b) Zeige:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) \quad = \quad \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \left(g(w + r \cdot e^{i\phi}) \right) \cdot e^{-i\phi} \, d\phi \, dr$$

$$= \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-1}{\pi} \int_\epsilon^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \left(g(w + r \cdot e^{i\phi}) \right) \cdot e^{-i\phi} \, d\phi \, dr \quad = \quad g(w).$$

(5=2+3 Punkte)