Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

# Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 10

**Abgabe bis Di 29.06.10 um 11:00 Kasten links neben HS 6**

**Aufgabe 29)** Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$ endlich und $X = D - S$. Zeige, dass $X$ eine offene Überdeckung durch zwei Elementargebiete $X = U_1 \cup U_2$ besitzt, so dass $U_1 \cap U_2$ disjunkte Vereinigung von $n+1$ Elementargebieten ist.

*Tipp:* Reduziere zuerst auf die beiden Fälle $D = \mathbf{E} = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$ und $D = \mathbb{C}$, und zeige anschließend, dass man zusätzlich noch $Re(z_\nu) \neq Re(z_\mu)$ für $\nu \neq \mu$ annehmen kann. Danach konstruiere man $U_1$ und $U_2$ so, dass $U_1 \cap U_2 \ = \ \{z \in D \mid Re(z) \neq Re(z_\nu) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$ gilt.

(3 Punkte)

**Aufgabe 30)** (a) Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf dem topologischen Raum $X$ und $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von $X$. Zeige, dass man eine exakte Sequenz hat:

$$0 \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(U_1) \oplus \mathcal{G}(U_2) \xrightarrow{d} \mathcal{G}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{R} H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \to 0$$

mit $d(f_1, f_2) = r_{U_1}^{U_1 \cap U_2}(f_1) - r_{U_2}^{U_1 \cap U_2}(f_2)$ und einer geeignet zu definierenden (!) Abildung $R$.

(b) Berechne $H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G})$ in den folgenden Fällen:

(b1) $X$ und $U_1, U_2$ wie in Aufgabe 29), $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_X$ die konstante Garbe;

(b2) $X = \mathbb{C}^*$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}$, $U_1 = \{z \in \mathbb{C}|\ 0 < |z| < 2\}$, $U_2 = \{z \in \mathbb{C}|\ 1 < |z|\}$.

(5=3+1+1 Punkte)

**Aufgabe 31)** (a) Zeige: Ist $f : \mathbf{H} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion mit $f(z+1) = f(z)$ für $z \in \mathbf{H}$, so gibt es eine meromorphe Funktion $g : \mathbf{D}^* \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $f(z) = g(e^{2\pi iz})$. Hierbei ist $\mathbf{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. $f$ ist genau dann holomorph in $\mathbf{H}$, wenn $g$ holomorph in $\mathbf{D}^*$ ist.

(b) Ist $g$ im Nullpunkt meromorph von der Ordnung $n \in \mathbb{Z}$, so setzen wir $ord_\infty(f) = n$. Zeige in diesem Fall:

$$ord_\infty(f) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^{a+1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \qquad \text{wobei}$$

man entlang der Verbindungsstrecke integriert und wobei $a \in \mathbf{H}$ so gewählt ist, dass $f$ keine Pole im Bereich $Im(z) \geq Im(a)$ hat.

(3=1+2 Punkte)

**Aufgabe 32)** (a) Sei $f : \mathbf{H} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, die der Gleichung aus Aufgabe 28)b) genügt. Für $z \in \mathbf{H}$ setzen wir

$$\widetilde{ord}_z(f) = \frac{2}{\#(\Gamma_z)} \cdot ord_z(f)$$

mit $\Gamma_z$ aus Aufgabe 9). Mit dem $D$ aus Aufgabe 5) zeige man:

$$ord_\infty(f) + \sum_{z \in D} \widetilde{ord}_z(f) = \frac{k}{12}.$$

*Tipp:* Man wende den Residuensatz auf $\frac{f'}{f}$ an, wobei man entlang eines Weges integriert, der eine geeignete Modifikation des Randes von $D$ ist, und benutzt 28)e) für die Integralauswertung.

(b) Folgere, dass $E_4$ und $E_6$ (Aufgabe 28) außer bei $\rho$ bzw. $i$ keine weiteren Nullstellen haben.

(5=4+1 Punkte)