Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 2 SS 10 Blatt 1

Abgabe bis Di 27.04.10 um 11:00 Kasten neben HS 6

Aufgabe 1) Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sowie $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ der durch $f \mapsto f'$ definierte Garbenmorphismus.

(a) Für welche offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ ist $\phi : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ surjektiv?

(b) Zeige, dass ϕ ein surjektiver Garbenhomomorphismus ist.

(c) Welche Garbe ist $ker(\phi)$?

(4=1+2+1 Punkte)

Aufgabe 2) (a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X. Zeige, dass durch

$$(f_*\mathcal{G})(U) \quad = \quad \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \qquad \text{für } U \subset Y \text{ offen}$$

eine Garbe $f_*\mathcal{G}$ auf Y definiert wird.

(b) Im Fall $X = Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ und $f(z) = z^2$ zeige man für die konstante Garbe $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_X$, dass $(f_*\mathcal{G})_x \equiv \mathcal{G}_x \oplus \mathcal{G}_x$ in allen Punkten $x \in S^1$ gilt, dass aber die Garbe $f_*\mathcal{G}$ nicht zur Garbe $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ isomorph ist.

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 3) (a) Sei $\mathcal{G}$ eine Untergarbe der Garbe $\mathcal{F}$ auf dem Raum X. Zeige, dass die Prägarbe $\mathcal{Q} : U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ das Garbenaxiom (G1) erfüllt.

(b) Zeige im Beispiel $X = \mathbb{C}, \mathcal{F} = \mathcal{O}, \mathcal{G} = \mathbb{C}_X$, dass $\mathcal{Q}$ das Garbenaxiom (G2) nicht erfüllt.

(5=2+3 Punkte)