Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. U. Weselmann

Übungen "Geometrie von Modulkurven" SS 2008

Blatt 5 Abgabe bis Donnerstag 15.05.2008 11:15

Aufgabe 13) Für eine endliche Menge M betrachten wir den Ring $R_M = \{f : M \to \mathbb{Z}\}$ aller Abbildungen von M nach $\mathbb{Z}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

(a) Zeige, dass für jeden Körper K die Menge $R_M(K) = Hom_{Ringe}(R_M, K)$ sich bijektiv auf M abbildet.

(b) Zeige, dass $R_M \otimes_{\mathbb{Z}} R_M$ zu $R_{M\times M}$ isomorph wird, indem man $f_1 \otimes f_2$ mit der Abbildung $(m_1, m_2) \mapsto f_1(m_1) \cdot f_2(m_2)$ identifiziert.

(c) Sei jetzt $M = G$ eine endliche Gruppe mit Einselement 1_G. Für $f \in R_G$ betrachten wir

$$\mu_0(f) \in R_G \otimes_{\mathbb{Z}} R_G \cong R_{G\times G} : (g_1, g_2) \mapsto f(g_1 g_2)$$

$$i_0(f) \in R_G : g \mapsto f(g^{-1}), \qquad e_0(f) = f(1_G) \in \mathbb{Z}.$$

Zeige, dass die Abbildungen μ_0, i_0, e_0 auf $Spec(R_G)$ die Struktur eines Gruppenschemas induzieren. Es heißt konstantes Gruppenschema zur Gruppe G.

(4 Punkte)

Aufgabe 14) Zeige, dass die Endomorphismen des Gruppenschemas $\mathbb{G}_m/Spec(\mathbb{Z})$ genau aus den Vielfachen der Identität bestehen.

(3 Punkte)

Aufgabe 15) Seien X, Y Schemata von endlichem Typ über $Spec(\mathbb{C})$. Zeige: Die analytische Topologie auf $(X \times_{\mathbb{C}} Y)(\mathbb{C})_{an}$ stimmt mit der Produkttopologie auf $X(\mathbb{C})_{an} \times Y(\mathbb{C})_{an}$ überein. $X(\mathbb{C})_{an}$ ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\{(x, x) | x \in X(\mathbb{C})\}$ in $(X \times_{\mathbb{C}} X)(\mathbb{C})_{an}$ abgeschlossen ist.

(3 Punkte)