Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. U. Weselmann

Übungen "Geometrie von Modulkurven" SS 2008

Blatt 3 Abgabe bis Freitag 02.05.2008 15:00 in mein Postfach

Aufgabe 7) Für offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ bilden wir mit den Garben der differenzierbaren Funktionen $\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_V$ lokal geringte Räume. Zeige: Jeder Morphismus $(f, f^\#) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ von lokal geringten Räumen wird von einer differenzierbaren Abbildung $\phi : U \to V$ induziert.

Man gebe eine neue Definition von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten unter Benutzung des Begriffs des lokal geringten Raumes.

(4 Punkte)

Aufgabe 8) Sei X ein beliebiges Schema, $\mathbb{A}^1 = Spec(\mathbb{Z}[Y])$ sowie $\mathbb{G}_m = Spec(\mathbb{Z}[Y, \frac{1}{Y}])$.

(a) Zeige: man hat eine Bijektion zwischen $Hom_{Sch}(X, \mathbb{A}^1)$ und $\mathcal{O}_X(X)$.

(b) Zeige: man hat eine Bijektion zwischen $Hom_{Sch}(X, \mathcal{G}_m)$ und den Einheiten $\mathcal{O}_X(X)^*$.

(2 Punkte)

Aufgabe 9) Für $n \in \mathbb{N}$ und einen Ring R betrachten wir die folgenden Polynomringe

$$A_i = R[Y_{i0}, \ldots, Y_{i,i-1}, Y_{i,i+1}, \ldots, Y_{i,n}] \quad \text{für } i = 0, \ldots, n$$

mit Unbestimmten X_{ij} $(j \neq i)$.

Sei $X_i = Spec(A_i)$ und $U_{ij} = D(X_{ij}) \subset X_i$ für $j \neq i$ sowie $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ von dem Ringhomomorphismus

$$\psi_{ij} : (A_j)_{X_{ji}} \to (A_i)_{X_{ij}}, \quad X_{jk} \mapsto \frac{X_{ik}}{X_{ij}} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n,$$

mit $\psi_{ij}(r) = r$ für $r \in R$ induziert, wobei $X_{ii} = 1$ gesetzt sei.

Zeige, dass sich die affinen Schemata X_i über $Spec(R)$ zu einem Schema X über $Spec(R)$ zusammenkleben lassen. Dieses Schema heißt n-dimensionaler projektiver Raum über $Spec(R)$, Bezeichung $\mathbb{P}^n_R$.

(3 Punkte)