Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. U. Weselmann

Übungen "Geometrie von Modulkurven" SS 2008

Blatt 11 Abgabe bis Donnerstag 26.06.2008 11:15

Aufgabe 31) Für zwei teilerfremde homogene Polynome vom Grad 2

$$f, g \in R = A[X_0, X_1, X_2, X_3]$$

betrachten wir $i : Y = Proj(R/(f,g)) \hookrightarrow X = Proj(R) = \mathbb{P}^3_A$. Zeige, dass es für die Idealgarbe $\mathcal{I}$ von Y eine exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X(-4) \to (\mathcal{O}_X(-2))^2 \to \mathcal{I} \to 0$$

gibt und berechne damit $H^j(X, \mathcal{I})$ und $H^j(Y, \mathcal{O}_Y)$ für alle $j \geq 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe 32) (Hyperelliptische Kurven) Für $g \in \mathbb{N}$ seien Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_{2g+2}$ eines Ringes A gegeben. Mit

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots a_{2g+2} X^{2g+2}, \quad g(Z) = a_0 Z^{2g+2} + a_1 Z^{2g+1} + \ldots + a_{2g+2}$$

betrachten wir $R_1 = A[X,Y]/(Y^2 - f(X))$ und $R_2 = A[Z,W]/(W^2 - g(Z))$.

(a) Zeige, dass durch $\psi(X) = \frac{1}{Z}$ und $\psi(Y) = \frac{W}{Z^{g+1}}$ ein Isomorphismus der Ringlokalisierungen $(R_1)_X$ und $(R_2)_Z$ bestimmt wird.

(b) Das Schema S entstehe aus den affinen Schemata $U_1 = Spec(R_1)$ und $U_2 = Spec(R_2)$ durch Verkleben der offenen Teilmengen $D(X)$ und $D(Z)$ mittels ψ. Zeige, dass S ein eigentliches und separiertes Schema über $Spec(A)$ ist.

(c) Zeige, dass $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ ein freier A-Modul vom Rang g ist.

(d) Im Falle, dass A ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, zeige man, dass S genau dann regulär ist, wenn der Grad des Polynoms f mindestens $2g + 1$ ist und f keine mehrfachen Nullstellen hat.

(6 Punkte)